Formelsammlung Strömungsmechanik II

Allgemeine Erhaltungssätze

Reynolds'sches Transporttheorem

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\iiint\limits_V \varphi\,\mathrm{d}\,V \;=\; \iiint\limits_V \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,t}\,\mathrm{d}\,V \;+\; \iint\limits_S \varphi\,u_i\,n_i\,\mathrm{d}\,S \tag{1}$$

Erhaltung der Masse

$$\frac{\mathrm{D}\,\rho}{\mathrm{D}\,t} \;+\; \rho\,\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_i} \;=\; 0 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{D}\;\rho}{\mathrm{D}\,t} \;+\; \rho\,\nabla\cdot\vec{u} \;=\; 0 \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{D}\,m}{\mathrm{D}\,t} \;=\; \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\iiint\limits_V \rho\,\mathrm{d}\,V \;=\; \iiint\limits_V \frac{\partial\,\rho}{\partial\,t}\,\mathrm{d}\,V \;+\; \iint\limits_S \rho\,u_i\,n_i\,\mathrm{d}\,S \;=\; 0 \tag{4}$$

Erhaltung des Impulses

$$\rho\frac{\mathrm{D}\,\vec{u}}{\mathrm{D}\,t} \;=\; \rho\vec{k} \;+\; \nabla\cdot\vec{\vec{T}} \tag{5}$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}\,u_i}{\mathrm{D}\,t} \;=\; \rho k_i \;+\; \frac{\partial\,T_{ij}}{\partial x_j} \tag{6}$$

Energieerhaltung

$$\frac{\mathrm{D}\,e}{\mathrm{D}\,t} \;=\; \frac{\tau_{ji}}{\rho}\,\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_j} \;-\; \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\,q_i}{\partial\,x_i} \tag{7}$$

$$\tau_{ij} \;=\; -p\,\delta_{ij} \;+ P_{ij} \tag{8}$$

$$\rho\,\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\left[\frac{u_i\,u_i}{2} \;+\; h\right] \;=\; \frac{\partial\,p}{\partial\,t} \;+\; \rho\,k_i\,u_i \;+\; \frac{\partial}{\partial\,x_j}\,(P_{ji}\,u_i) \;-\; \frac{\partial\,q_i}{\partial\,x_i} \tag{9}$$

Dissipationsfunktion:

$$\Phi = P_{ij}\,e_{ij} \tag{10}$$

Erhaltungssätze für Newton'sche Fluide

Materialgesetz

$$\tau_{ij} \;=\; -p\,\delta_{ij} \;+\; \lambda^*\, e_{kk}\,\delta_{ij} \;+\; 2\,\eta\, e_{ij}, \tag{11}$$

bzw. in symbolischer Schreibweise

$$\vec{\vec{T}} \;=\; (-p \;+\; \lambda^*\,\nabla\cdot\vec{u})\,\vec{\vec{I}} \;+\; 2\eta\,\vec{\vec{E}} \tag{12}$$

mit Deformationsgeschwindigkeitstensor e_{ij}

$$\vec{\vec{E}} \;=\; \vec{e}_i\,\vec{e}_j\,e_{ij} \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_j} \;+\; \frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\right]\vec{e}_i\,\vec{e}_j \;=\; \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} \;+\; \nabla\vec{u}^{\,T}\right] \tag{13}$$

Navier-Stokes'schen Gleichungen

$$\rho\,\frac{D\,u_i}{D\,t} \;=\; \rho\,k_i \;+\; \frac{\partial}{\partial\,x_i}\left\{-p \;+\; \lambda^*\frac{\partial\,u_k}{\partial\,x_k}\right\} \;+\; \frac{\partial}{\partial\,x_j}\left\{\eta\left[\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_j} \;+\; \frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\right]\right\} \tag{14}$$

bzw. in symbolischer Form

$$\rho\,\frac{D\,\vec{u}}{D\,t} \;=\; \rho\,\vec{k} \;-\; \nabla p \;+\; \nabla(\lambda^*\,\nabla\cdot\vec{u}) \;+\; \nabla\cdot(2\eta\,\vec{\vec{E}}) \tag{15}$$

Mit der Stokes'schen Hypothese

$$\eta_D \;=\; \lambda^* \;+\; \frac{2}{3}\eta \;=\; 0 \tag{16}$$

umgeformt:

$$\rho\,\frac{D\,u_i}{D\,t} \;=\; \rho\,k_i \;-\; \frac{\partial\,p}{\partial\,x_i} \;-\; \frac{2}{3}\,\frac{\partial}{\partial\,x_i}\left\{\eta\,\frac{\partial\,u_k}{\partial\,x_k}\right\} \;+\; \frac{\partial}{\partial\,x_j}\left\{\eta\left[\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_j} \;+\; \frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\right]\right\} \tag{17}$$

bzw. in symbolischer Form

$$\rho\,\frac{D\,\vec{u}}{D\,t} \;=\; \rho\,\vec{k} \;-\; \nabla p \;-\; \frac{2}{3}\,\nabla(\eta\,\nabla\cdot\vec{u}) \;+\; \nabla\cdot(2\eta\,\vec{\vec{E}}) \tag{18}$$

Turbulente Strömungen

Reynolds-Averaged-Navier-Stokes (RANS) Gleichungen

$$\rho\,\frac{\mathrm{D}\,\bar{u}}{\mathrm{D}\,t} \;=\; -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \eta\left[\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}\right] - \rho\left[\frac{\partial\overline{u'\,u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u'\,v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{u'\,w'}}{\partial z}\right] \tag{19}$$

$$\rho\,\frac{\mathrm{D}\,\bar{v}}{\mathrm{D}\,t} \;=\; -\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \eta\left[\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{v}}{\partial z^2}\right] - \rho\left[\frac{\partial\overline{v'\,u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v'\,v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{v'\,w'}}{\partial z}\right] \tag{20}$$

$$\rho\,\frac{\mathrm{D}\,\bar{w}}{\mathrm{D}\,t} \;=\; -\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} + \eta\left[\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial z^2}\right] - \rho\left[\frac{\partial\overline{w'\,u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{w'\,v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{w'\,w'}}{\partial z}\right] \tag{21}$$

Stromfadentheorie

Unterschall- und Überschall-Diffusor bzw. Düse

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}\,(1\;-\;M^{\,2})\;=\;-\,\frac{1}{A}\,\frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,x} \tag{22}$$

Hugoniot-Relation

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right]. \tag{23}$$