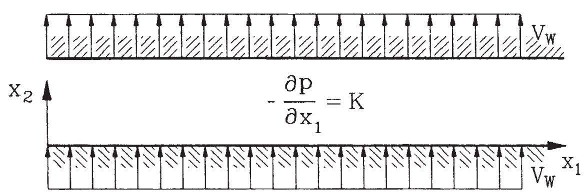
Strömungsmechanik II
Hausaufgabe zu Übung 4
"Navier-Stokes-Gleichungen"

SS 2008

Aufgaben



Obenstehendes Bild zeigt einen in x_1- und x_3-Richtung unendlich ausgedehnten Kanal der Höhe h, der von einer Newtonschen Flüssigkeit durchströmt wird. Die ebene Strömung ist stationär, die Dichte ρ und die Viskosität η sind konstant, Volumenkräfte sind zu vernachlässigen. Die Begrenzungswände des Kanals sind porös, so dass unten durch Einblasen und oben durch Absaugen eine konstante Wandnormalenkomponente V_W der Geschwindigkeit erzeugt wird. Der Druckgradient in x_1-Richtung ist konstant ($\partial p/\partial x_1 = -K$). Wegen der unendlichen Ausdehnung des Kanals hängt die Geschwindigkeitsverteilung nicht von x_1 ab.

1. Berechnen sie aus der Kontinuitätsgleichung die Verteilung der Geschwindigkeitskomponente in x_2-Richtung $u_2(x_2)$!

2. Vereinfachen sie die x_1-Komponente der Navier-Stokesschen Gleichungen für dieses Problem!

3. Wie lauten die Randbedingungen für die Geschwindigkeitskomponente u_1?

4. Berechnen sie die Geschwindigkeitsverteilung $u_1(x_2)$!
(Hinweis: Nach Lösung der homogenen Gleichung kann die Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung durch den Ansatz $u_{1p} = \mathrm{const} * x_2$ gelöst werden).

Lösungen

Aufgabenteil 1.1

Da ρ eine absolute Konstante ist, ist auch $\mathrm{D}\,\rho/\mathrm{D}\,t \equiv 0$ und aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\frac{\mathrm{D}\,\rho}{\mathrm{D}\,t} + \rho\,\nabla\cdot\vec{u} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

Der Term $\partial u_1/\partial x_1$ verschwindet genauso, wie alle Ableitungen in x_3-Richtung (ebenes Problem), und wegen

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \tag{3}$$

schließen wir auf

$$u_2 = \text{const.} \tag{4}$$

Mit den Randbedingungen

$$u_2(x_2 = 0) = u_2(x_2 = h) = V_W \tag{5}$$

lässt sich die Geschwindigkeit bestimmen:

$$u_2 = V_W \tag{6}$$

Aufgabenteil 1.2

Die Navier-Stokesschen Gleichungen für inkompressible Ströumg lauten

$$\rho\,\frac{\mathrm{D}\,\vec{u}}{\mathrm{D}\,t} = \rho\,\vec{k} - \nabla p + \eta\,\nabla^2\vec{u} \tag{7}$$

bzw. in Indexschreibweise

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \rho\,k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial u_i}{\partial x_j\,\partial x_j} \tag{8}$$

Mit den Annahmen der Stationarität ($\partial u_i/\partial t = 0$, der Vernachlässigung der Volumenkräfte $k_i = 0$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\rho u_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial u_i}{\partial x_j\,\partial x_j}. \tag{9}$$

Die Gleichung für die x_1-Komponente lautet dann (i=1):

$$\rho \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \eta \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right). \tag{10}$$

Mit den Ergebnissen aus dem Aufgabenteil 1.1
$\partial u_1/\partial x_3 = 0$, $\partial u_1/\partial x_1 = 0$, $u_2 = V_W$ und $u_3 = 0$ vereinfacht sich Gleichung (10) zu

$$\rho\, V_W \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = K + \eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \tag{11}$$

Mit $\nu = \eta/\rho$ und $\partial u_1/\partial x_2 = \mathrm{d}\, u_1/\mathrm{d}\, x_2$ lässt sich auch schreiben

$$V_W \frac{\mathrm{d}\, u_1}{\mathrm{d}\, x_2} = \frac{1}{\rho} K + \nu \frac{\mathrm{d}^{\,2} u_1}{\mathrm{d}\, x_2^2} \tag{12}$$

Aufgabenteil 1.3

Die Randbedingungen ergeben sich aus den Haftbedingungen an der Wand zu

$$u_1(x_2 = 0) = 0, \quad u_1(x_2 = h) = 0 \tag{13}$$

Aufgabenteil 1.4

Als Ergebnis des Aufgabenteils 1.2 erhält man eine gewöhnliche, lineare inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\nu \frac{\mathrm{d}^{\,2} u_1}{\mathrm{d}\, x_2^2} - V_W \frac{\mathrm{d}\, u_1}{\mathrm{d}\, x_2} = -\frac{K}{\rho} \tag{14}$$

1. Die homogene Lösung folgt aus

$$\nu \frac{\mathrm{d}^{\,2} u_1}{\mathrm{d}\, x_2^2} - V_W \frac{\mathrm{d}\, u_1}{\mathrm{d}\, x_2} = 0. \tag{15}$$

   Mit dem Ansatz $u_1 = C\, e^{\lambda\, x_2}$ erhält man das charakteristische Polynom

$$\nu\, \lambda^2 - V_W\, \lambda = 0, \tag{16}$$

   die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \frac{V_W}{\nu} \tag{17}$$

   und somit

$$\begin{aligned} u_{1h} &= C_1\, e^{\lambda_1\, x_2} + C_1\, e^{\lambda_2\, x_2} = C_1\, e^{0\, x_2} + C_2\, e^{\frac{V_W}{\nu}\, x_2} && (18)\\ &= C_1 + C_2\, e^{\frac{V_W}{\nu}\, x_2} && (19) \end{aligned}$$

2. Für die Störfunktion einer Differentialgleichung $r(x)$ gilt

$$r(x) = p(x)e^{ax}\cos(bx)$$

und für $p(x)$ kann bei $a + i\,b = 0$ ein Polynomansatz $q(x)$ gewählt werden. Da der Ansatz vom gleichen Grad sein muss wie $p(x)$ gilt hier

$$q(x) = C_3 \tag{20}$$

Wenn aber $a + i\,b = 0$ eine k-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist (Resonanzfall), muss $q(x)$ mit x^k multipliziert werden, hier also mit x, so dass sich die Partikularlösung ergibt

$$u_{1p} = C_3\,x_2 \tag{21}$$

Durch Einsetzen der Partikularlösung in die DGL (14) erhält man

$$\nu\,\frac{\mathrm{d}^2 u_{1p}}{\mathrm{d}\,x_2^2} - V_W\,\frac{\mathrm{d}\,u_{1p}}{\mathrm{d}\,x_2} = -\frac{K}{\rho} \tag{22}$$

$$-V_W\,C_3 = -\frac{K}{\rho} \tag{23}$$

$$C_3 = \frac{K}{\rho\,V_W} \tag{24}$$

Die spezielle Lösung ist somit

$$u_{1p} = \frac{K}{\rho\,V_W}\,x_2. \tag{25}$$

Die allgemeine Lösung

$$u_1(x_2) = u_{1h} + u_{1p} = C_1 + C_2\,e^{\frac{V_W}{\nu}\,x_2} + \frac{K}{\rho\,V_W}x_2 \tag{26}$$

ist mit den Randbedingungen aus Aufgabenteil 1.3

$$u_1(x_2 = 0) = C_1 + C_2 = 0 \tag{27}$$

$$u_1(x_2 = h) = C_1 + C_2\,e^{\frac{V_W\,h}{\nu}} + \frac{K\,h}{\rho\,V_W} = 0 \tag{28}$$

$$\Rightarrow -C_1 = C_2 = \frac{K\,h}{\rho\,V_W}\,\frac{1}{1 - e^{\frac{V_W\,h}{\nu}}} \tag{29}$$

anzupassen, so dass die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung lautet

$$u_1(x_2) = \frac{K\,h}{\rho\,V_W}\left(\frac{x_2}{h} - \frac{1 - e^{\frac{V_W\,x_2}{\nu}}}{1 - e^{\frac{V_W\,h}{\nu}}}\right). \tag{30}$$