Universität Hannover
Institut für Strömungsmaschinen
Prof. Dr.-Ing. J .Seume

Klausur Frühjahr 2002

„Strömungsmechanik I“

Bearbeitungsdauer: 90 min

zugelassene Hilfsmittel:

Taschenrechner
Formelsammlung-IfS, ohne handschriftliche Ergänzungen
Lineal und Schreibmaterial
mitgebrachtes Papier

Name	**Vorname**	**Matr. Nummer**

	mögliche Punktezahl	**erreichte Punktezahl**
Aufgabe 1	**24**	
Aufgabe 2	**38**	
Aufgabe 3	**38**	
Gesamt	**100**	
	Note	

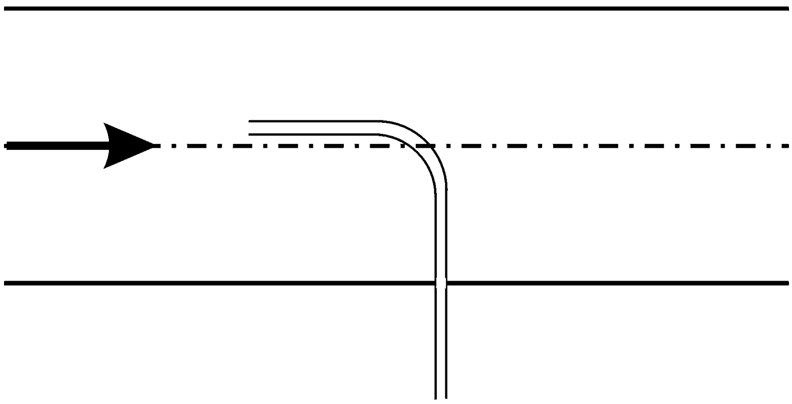
1. Kurzfragen: (24 Punkte)

Kurzfrage a

In einem mit Luft (ideales Gas, der Gewichtseinfluss des Gases sei vernachlässigbar) durchströmten Kanal ist ein Pitotrohr eingebracht, das mit einem U-Rohr verbunden ist und in dem eine Messflüssigkeit (Dichte ρ_fl) steht.

c1) Vervollständigen Sie die Messanordnung und benennen Sie die messbare(n) Größe(n). Geben Sie die physikalischen Zusammenhänge der Messgrößen an! (3 Punkte)

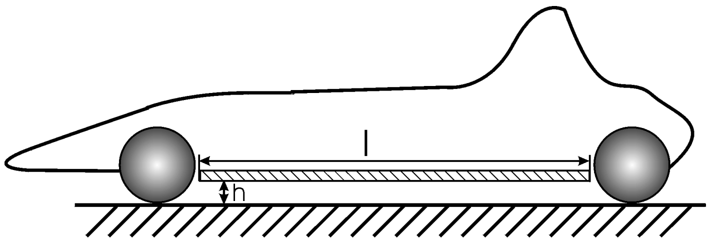
c2) Machen Sie einen Vorschlag, wie durch eine zusätzliche Messung bzw. eine Modifizierung der Sonde auch die Strömungsgeschwindigkeit im Strömungskanal ermittelt werden kann. (Skizze!). Geben Sie auch hier die Zusammenhänge der Messgrößen an!
(5 Punkte)



Kurzfrage b

Ein Sportwagen fährt mit einer Geschwindigkeit von 280 km/h. Unter dem Wagen ist zur besseren Bodenhaftung eine Platte (Länge l, Breite b) installiert, die nur 10 mm über dem Asphalt liegt.

Gegeben:	$l = 2{,}5$ m	$\nu_{Luft,} = 15{,}3\ 10^{-6}\ m^2/s$	$c_{Sportwagen} = 280$ km/h
	$b = 1{,}5$ m	$\rho_{Luft} = 1{,}225\ kg/m^3$	$h = 10$ mm



b1) Skizzieren Sie den Geschwindigkeitsverlauf zwischen dem Boden und der Platte und benennen Sie diese Strömungsart. Nehmen Sie an, die Strömung sei laminar. Bestimmen Sie den Wert der Wandschubspannung an der Platte sowie die Kraft, die aufgrund der Reibung auf das Auto wirkt. Randeffekte an der Platte seien vernachlässigt. (8 Punkte)

Kurzfrage c

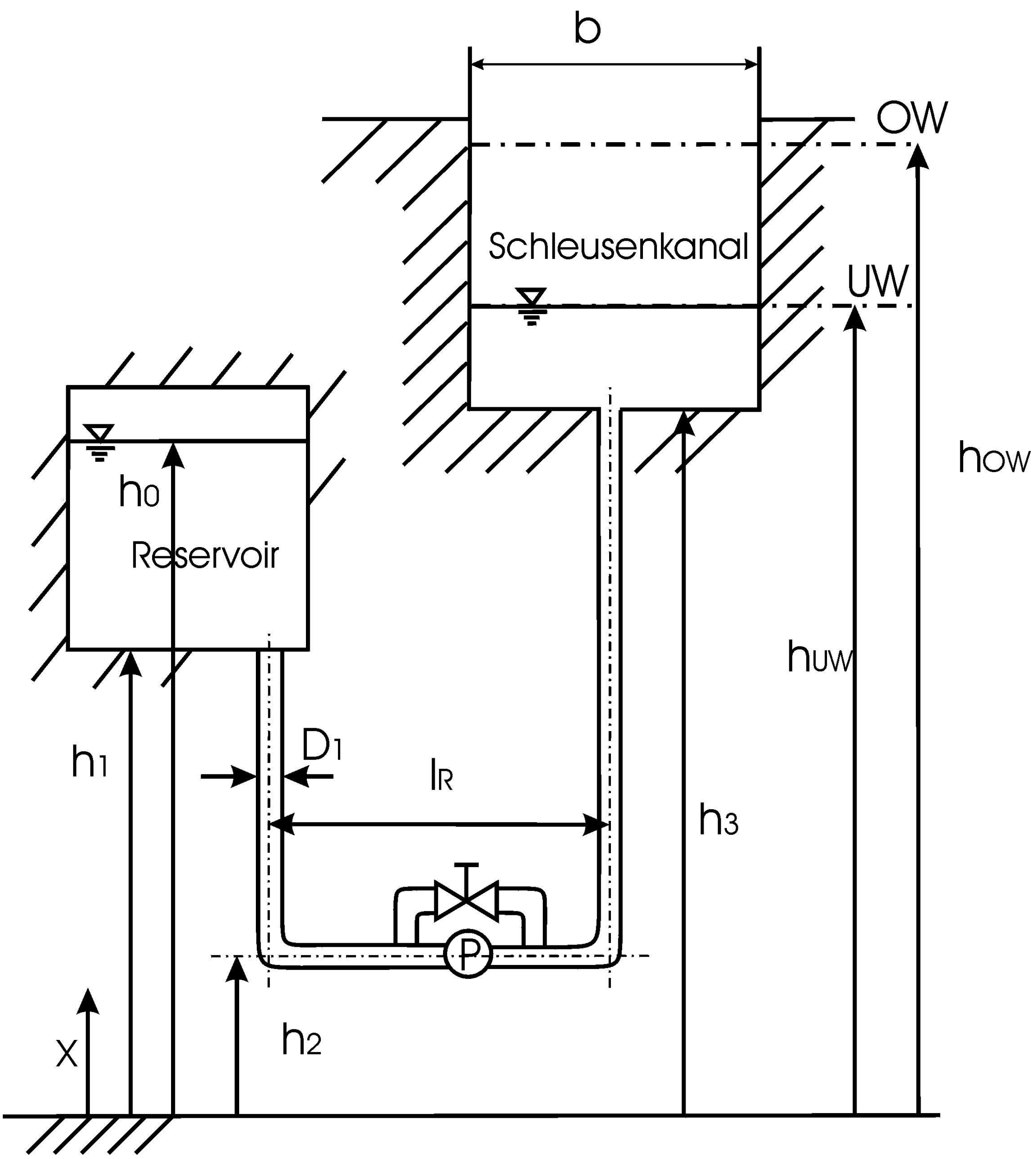
d1) Geben Sie die allgemeine Form der Navier-Stokes-Gleichung (inkompressibel, instationär) in Richtung der x-Komponente an. Lösen Sie die Tensornotation auf. $\vec{x}$ (x,y,z) und $\vec{c}$ (u,v,w). Erklären Sie den Grundansatz der Gleichung und ordnen Sie die einzelnen Terme den im Grundansatz berücksichtigten Größen zu! (8 Punkte)

<u>Aufgabe 2</u> (38 Punkte)

Zum Betrieb eines Schleusenwerks sind 4 Pumpen parallel installiert, die Wasser (Dichte ρ_W, inkompressibel) aus einem Reservoir in den Schleusenkanal (Länge l, Breite b) pumpen, um den Wasserspiegel in das Oberwasser (OW) zu heben. Das Reservoir ist sehr groß, so dass der Wasserspiegel des Reservoirs für **alle** Aufgabenteile als konstant angenommen wird.

Gegeben:	<u>Höhenangaben:</u>	<u>Rohr:</u>	<u>Wasser:</u>
	$h_0 = 12$ m	$l_R = 7$ m	$\nu_W = 1 \cdot 10^{-6}$ m^2/s
	$h_1 = 8$ m	$D_1 = 0{,}4$ m	$\rho_W = 1000$ kg/m^3
	$h_2 = 4$ m	$k_s/D_1 = 10^{-2}$	
	$h_3 = 12$ m		
	<u>Schleusenkanal:</u>		<u>Pumpe:</u>
	$h_{UW} = 16$ m	$b = 10$ m	$\eta = 0{,}8$
	$h_{OW} = 23{,}5$ m	$l = 25$ m	

Querschnitt: Schleusenkanal



Das Wasser stehe zu Beginn im Unterwasser. Die vier Pumpen sollen den gleichen Massenstrom fördern und sind mit einem Wirkungsgrad von η=0,8 dokumentiert.

a) An der Stelle 1 im Rohr liege eine Reynoldszahl von $7{,}4 \cdot 10^5$ vor. Ist die Rohrströmung laminar oder turbulent? Wie groß ist der geförderte Volumenstrom in den Schleusenkanal und wie lange dauert der Auffüllvorgang, wenn man einen zeitlich konstanten Massenstrom zu Grunde legt. (7 Punkte)

b) Berechnen Sie die elektrische Anschlussleistung der Pumpen zuerst auf der Grundlage einer reibungsfreien, dann einer reibungsbehafteten Rohrströmung. Durch ein Versehen sind die Pumpen mit der erstberechneten Leistung installiert worden. Geben Sie mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung und dem Moody-Diagramm **qualitativ** an, welche Auslegungsgrößen sich ändern und mit welcher Tendenz sie sich ändern. (20 Punkte)

Der Wasserspiegel steht nun im Oberwasser. Durch das Öffnen der Sperrventile wird bei geschlossenen Toren das Wasser zurück in das Reservoir abgelassen.

c) Leiten Sie die Differentialgleichung zur Berechnung des zeitlichen Verlaufes des Wasserniveaus im Schleusenkanal her. Die Reibungsverluste können für diese Teilaufgabe vernachlässigt werden. (11 Punkte)

!Anm.: Das Integral soll weitestgehend vereinfacht werden, muss jedoch **nicht** gelöst werden**!**

Aufgabe 3 (38 Punkte)

Ein Überschallflugzeug befindet sich im 10000m Höhe. Seine Geschwindigkeit wird mittels Satellitenüberwachung mit 900 km/h bestimmt. Um das Flugzeug mit Überschall fliegen zu lassen, ist jedem Triebwerksaustritt eine Lavaldüse nachgeschaltet. Die Zustandsänderungen innerhalb der Lavaldüse sollen isentrop sein. Es soll für alle Aufgabenteile das ideale Gasgesetz gelten.

Gegeben:

Lavaldüse:

$Ma_{aus} = 2{,}2$
$c_{aus} = 1056$ m/s
$D_{aus} = 1{,}65$

Luft:

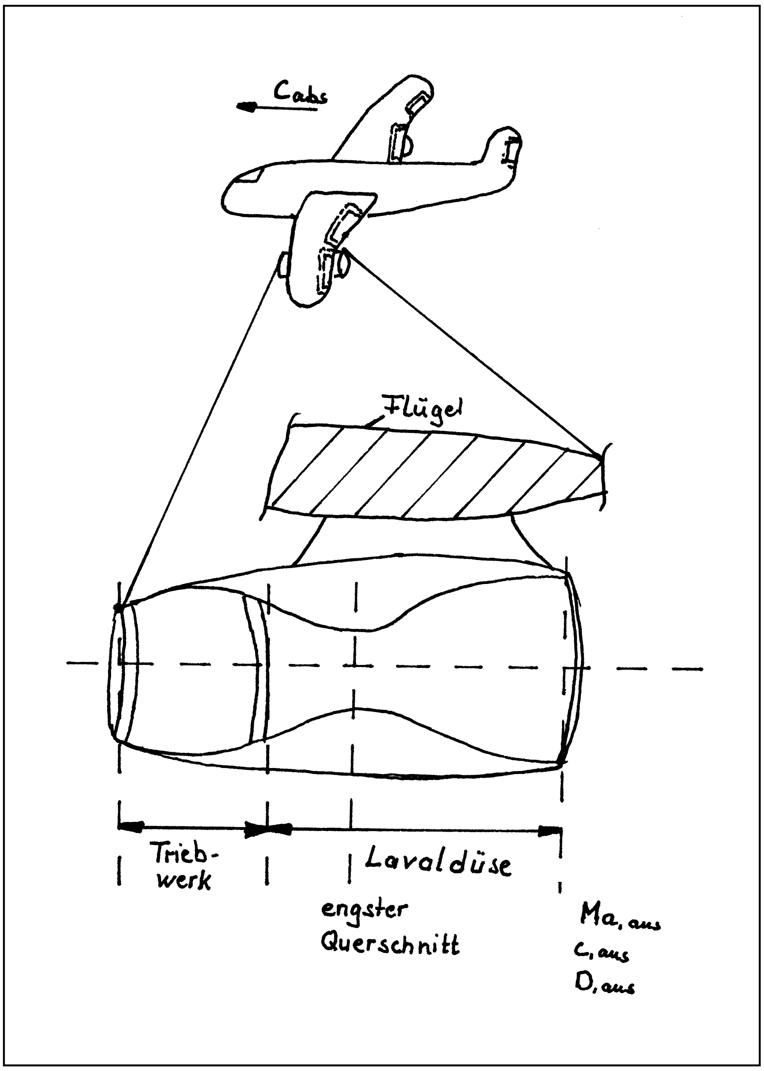
$R_{Luft} = 287$ J/kg K

in 10000m Höhe:
c_p (-55 ...-1°C) = 1007 J/kg K
$T_{Umgebung} = -55$°C
$p_{Umgebung} = 0{,}196$ bar

in der Lavaldüse:
c_p (0...1800°C) = 1260 J/kg K

Flugzeug

$c_{abs} = 900$ km/h
Triebwerke: 2



a) Geben Sie die Machzahl an, mit der das Flugzeug fliegt. (4 Punkte)

b) Geben Sie den Druck und die Temperatur unmittelbar an der Nasenspitze an, die gerade angeströmt wird und adiabat ist. (8 Punkte)

c) Wie groß ist die Temperatur, der Massenstrom sowie die auf die Schubdüse ausgeübte Kraft der abströmenden Gase? (9 Punkte)

d) Berechnen Sie die Zustandsgrößen T*, c*, ρ* sowie die engste Querschnittsfläche A*. (17 Punkte)

Musterlösung der Klausur StrömungsmechanikI im Frühjahr 2002

May 2, 2003

herausgegeben vom
Institut für Strömungschmaschinen
Universität Hannover

Aufgabe 1 - Kurzfragen

Kurzfrage a

a1

Pitorohr: Sonde zur Messung des Totaldruckes:

$$\underline{\underline{p_{tot}}} = p_{stat} + p_{dyn}$$

$$\underline{\underline{p_{stat}}} = p_0 + \ \varrho_{fl}\ g\ \Delta\ h_1$$

Hydrostatik von 1 nach 2

a2)

Erweiterung: <u>Hinzufügen einer statischen Druckmessung</u>

$$p_{tot} = p_{stat} + p_{dyn}$$

$$p_{dyn} = \frac{1}{2}\ \rho c^2 = p_{tot} - p_{stat}$$

$$p_{dyn} = p_0 + \ \varrho_{fl}\ g\ \Delta\ h_1 - p_0 - \ \varrho_{fl}\ g\ \Delta\ h_2$$

$$p_{dyn} = \ \varrho_{fl}\ g\ (\Delta\ h_1 - \ \Delta\ h_2)$$

$$\underline{\underline{c = \sqrt{\frac{2\ \varrho_{fl}\ g}{\varrho}\ (\Delta\ h_1 - \ \Delta\ h_2)}}}$$

o<u>der Prandl-Sonde</u> (!Achtung keine Vergabe von Doppelpunkten)

$$p_{tot} - p_{stat} = \frac{1}{2}\ \rho c^2$$

$$\varrho_{fl}\ g\ \varrho\ \Delta\ h_3 = \frac{1}{2}\ \rho c^2$$

$$\underline{\underline{c = \sqrt{\frac{2\ \varrho_{fl}\ g}{\varrho}\ (\Delta\ h_3)}}}$$

Kurzfrage b

Stichwort: Couette-Strömung
Geschwindigkeitsverteilung im Spalt:

$\underline{\underline{u(y) = \frac{U}{h} y}}$

u = 77,87 m/s

$\tau_w = \eta \ \frac{U}{h} = \nu \ \varrho \ \frac{U}{h}$

$\tau_w = 15,3 \ 10^6 \cdot 1,225 \cdot \frac{77,78}{0,01} = \underline{\underline{0,1458 \ \frac{N}{m^2}}}$

$F = \tau_w A = 0,1458 \cdot \ 2,5 \cdot \ 1,5 = \underline{\underline{0,5468N}}$

Kurzfrage c

die allgemein Form der Navier-Stokes-Gleichung lautet:

$\rho(\frac{\partial \ c_j}{\partial \ t} + c_i \frac{\partial \ c_j}{\partial \ x_i}) = -\frac{\partial \ p}{\partial \ x_j} + \eta \ \frac{\partial^2 \ c_j}{\partial^2 \ x_i} + f_j$

Auflösen der Gleichung in x-Richtung:

$$\rho(\underbrace{\frac{\partial \ u}{\partial \ t}}_{zeitl.Beschl.} + \underbrace{u\frac{\partial \ u}{\partial \ x} + u\frac{\partial \ v}{\partial \ x} + u\frac{\partial \ w}{\partial \ x}}_{konvektiveBeschl.}) = \underbrace{-\frac{\partial \ p}{\partial \ x}}_{Druckkraft} + \underbrace{\eta(\frac{\partial^2 \ u}{\partial^2 \ x} + \frac{\partial^2 \ v}{\partial^2 \ x} + \frac{\partial^2 \ w}{\partial^2 \ x})}_{Reibungsgradient} + \underbrace{f_x}_{Volumenkraft}$$

Der Grundansatz erfolgt aus der Newton'schen Mechanik und deren Gleichung $F = m \cdot \ a$, bzw. $\frac{\partial \ I}{\partial \ t} = m \cdot \ a$. Man betrachtet ein infinetisemal kleines Fluidelement, das größer ist als die mittlere, freie Weglänge, um intesive Größen wie Dichte, Temperatur und Druck als über dem Volumen konstant annehmen zu können. An diesem Fluidelement greifen, Druck-, Reibungs- und Volumenkräfte an

Aufgabe 2

Teilaufgabe a

mit

$Re = 740000 \Rightarrow \underline{\underline{turbulent}}$

$Re = \frac{D \cdot c}{\nu}$

$c = \frac{740000 \cdot 110^{-6} \frac{m^2}{s}}{0{,}4 m} = 1,85 \ \frac{m}{s}$

$\dot{V}_{Pumpe} = A \ c = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot c = \pi \cdot \frac{0{,}4^2}{4} \cdot 1,85 = 0,2325 \ \frac{m^3}{s}$

$\dot{V}_{ges} = \dot{V}_{Pumpe} \cdot 4 = \underline{\underline{0,93 \ \frac{m^3}{s}}}$

$V_{Becken} = (h_{OW} - h_{UW}) \cdot \ b \cdot \ l = (23,5 - 16) \cdot \ 10 \cdot \ 25 = 1875 \ m^3$

$\dot{V} = \frac{V}{t}$

$t = \frac{V}{\dot{V}} = \frac{1875}{0{,}93} = \underline{\underline{2016 \ s = 33,602 \ h}}$

Teilaufgabe b

<u>Bernoulli von 0 nach 3</u>

$$\frac{p_0}{\varrho} + \frac{1}{2} c_0^2 + g h_0 + \frac{P_{0,3}}{\varrho \ \dot{V}} = \frac{p_3}{\varrho} + \frac{1}{2} \ c_3^2 + g h_3$$

mit den Nebenbedingungen $p_0 = p_U$; $c_0 = 0$ folgt

$$\frac{P_{0,3}}{\varrho \ \dot{V}} = \frac{1}{2} \ c_3^2 + g h_3 - g h_0$$

Hydrostatik Punkt 3

$$p_3 = p_0 + \rho \ g \ (h_{UW} - h_3)$$

$$\frac{P_{0,3}}{\varrho \ \dot{V}} = \frac{1}{2} c_3^2 + g(h_{UW} - h_3) + g h_3 - g h_0$$

$$P_{0,3} = \varrho \ \dot{V} \cdot [(g(h_{UW} - h_0)) + \frac{1}{2} c_3^2]$$

$$P_{0,3} = 1000 \ 0,2325 \cdot [(9,81(16 - 12)) + \frac{1}{2} 1,85^2]$$

$$P_{0,3, \ ideal} = 9521,2 \ W$$

$P_{0,3,\ real} = 11901,5\ W$

$P_{0,3,\ real,\ alle\ Pumpen} = \underline{\underline{47605,8\ W}}$

reibungsbehaftet:

$Re = 740000 \Rightarrow \lambda = 0,038$

$\frac{p_0}{\varrho} + \frac{1}{2}c_0^2 + gh_0 + \frac{P_{0,3}}{\varrho\ \dot{V}} = \frac{p_3}{\varrho} + \frac{1}{2}\ c_3^2 + gh_3 + \lambda\ \frac{l}{d}\ \frac{1}{2}\ c_3^2$

$P_{0,3} = \varrho\ \dot{V} \cdot [(g(h_{UW} - h_0)) + \frac{1}{2}c_3^2 + \lambda\ \frac{l}{d}\ \frac{1}{2}\ c_3^2]$

$P_{0,3} = 1000\ 0,2325 \cdot [(9,81(16 - 12)) + \frac{1}{2}1,85^2 + 0,038\ \frac{4+7+8}{0,4}\ \frac{1}{2}\ 1,85^2]$

$P_{0,3,ideal} = 10239,4\ W$

$P_{0,3,real} = 12799,2\ W$

$P_{0,3,real,allePumpen} = \underline{\underline{51196,8\ W}}$

c_3 wird kleiner, somit die Auffüllzeit länger, die Reynoldszahl sinkt, auch wenn λ leicht ansteigt, sinken die Reibungsverluste

Teilaufgabe c

Bernoulli Oberwasser-1

$\frac{p_{OW}}{\varrho} + \frac{1}{2}c_{OW}^2 + gh_{OW} + = \frac{p_1}{\varrho} + \frac{1}{2}\ c_1^2 + gh_1$

Hydrostatik Punkt 1:

$p_1 = p_0 + \rho\ g\ (h_0 - h_1)$

Konti-Gleichung:

$c_{OW} = c_1 \frac{A_1}{A_{OW}} und\ \ differentiell\ \ \frac{-dh}{dt} = c_1 \frac{A_1}{A_{OW}} \Rightarrow c_{OW} = \frac{-dh}{dt}$

somit

$g(h_{OW} - gh_0) = \frac{1}{2}\ c_{OW}^2\ (\frac{A_{OW}}{A_1})^2 - \frac{1}{2}\ c_{OW}$

$c_{OW} = \sqrt{\frac{2\ g\ (h_{OW} - h_0)}{(\frac{A_{OW}}{A_1})^2 - 1}}$

$c_{OW}(t) = \sqrt{\frac{2\ g\ (h_{OW}(t) - h_0)}{(\frac{A_{OW}}{A_1})^2 - 1}} = \frac{-dh}{dt}$

$\underline{\underline{\int_{t1}^{t2}\ dt = \frac{\sqrt{1 - (\frac{A_{OW}}{A_1})^2}}{\sqrt{2\ g}} \cdot \int_{huw}^{how}\ \frac{1}{\sqrt{h_{OW}(t) - h_O}}\ dh}}$

Aufgabe 3

Teilaufgabe a

mit

$\kappa = \frac{c_p}{c_v};\ c_p - c_v = R$

$\kappa = \frac{c_p}{c_p - R} = \frac{1007}{1007 - 287} = 1,399 \approx 1,4$

$a = \sqrt{1,4\ 287\ 218,15} = 296,06\ \frac{m}{s}$

$Ma = \frac{c}{a} = \frac{250}{296{,}06} = \underline{\underline{0,844}}$

Teilaufgabe b

diese ist eine der Möglichkeiten, um zum Ziel zu kommen, hier abgeleitet aus der allgemeinen Gleichung.

$\frac{1}{2}c_0^2 + \frac{p_0}{\varrho_0} + c_v\ T_0 + gh_0 = \frac{1}{2}\ c_1^2 + \frac{p_1}{\varrho_1} + c_v\ T_1 + gh_1$

mit den Nebenbedingungen $c_1 = 0; h_0 \approx h_1$ (der Einfluss der Höhe kann vernachlässigt werden) folgt:

$\frac{1}{2}c_0 + c_p\ T_0 = c_p\ T_1$

$T_1 = \frac{1}{c_p}(\frac{1}{2}c_0 + c_p\ T_0)$

$$T_1 = \frac{1}{1007}(\frac{1}{2}(250)^2 + 1007\ 218,15) = \underline{\underline{249,2\ K = -23,97^oC}}$$

<u>isentrope Zustandsänderung:</u>

$$\frac{p}{p_0} = (\frac{T}{T_0})^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$p = p_0\ (\frac{T}{T_0})^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$p = 0,196\ (\frac{249,18}{218,15})^{\frac{1,4}{0,4}} = \underline{\underline{0,312\ 10^5\ Pa}}$$

Teilaufgabe c

mit

$$a = \sqrt{\kappa\ R\ T}$$

$$Ma = \frac{c}{a} \Rightarrow \sqrt{\kappa\ R\ T} = \frac{c}{Ma}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_p - 1} = \frac{1260}{1260-287} = 1,295 \approx\ 1,3$$

$$T = \frac{c^2}{Ma^2}\ \frac{1}{R\ \kappa} = \frac{1056^2}{2,2^2}\ \frac{1}{287\ 1,3} = \underline{\underline{617,5\ K = 344,4^oC}}$$

$$F_s = \rho_2\ A_2\ c_2^2$$

$$F_s = \frac{p_2}{R\ T_2}\ A_2\ c_2^2$$

$$F_s = \frac{0,196\ 10^5}{287\ 617,5}\ \frac{\pi\ 1,65^2}{4}\ 1056^2 = \underline{\underline{263707,7\ N}}$$

$$\dot{m} = \frac{F_s}{v} = \underline{\underline{249,72\ \frac{kg}{s}}}$$

Teilaufgabe d

wie c)

$$\frac{1}{2}c_1^{2*} + \frac{p_1^*}{\varrho_{1*}} + c_v\ T_1^* = \frac{1}{2}\ c_1^2 + \frac{p_1}{\varrho_1} + c_v\ T_1$$

$\frac{1}{2}c_1^{2*} + c_p\ T_1^* = \frac{1}{2}\ c_1^2 + c_p\ T_1$

$Ma = 1;\ c^* = \sqrt{\kappa\ R\ T^*}$

$T^* = \frac{\frac{1}{2}c_2^2 + c_p T_2}{\frac{1}{2}\kappa\ R + c_p}$

$T^* = \frac{\frac{1}{2}1056^2 + 1260\ 617{,}5}{\frac{1}{2}1{,}295\ 287 + 1260} = \underline{\underline{923,8K = 650,6^oC}}$

$\varrho^* = \varrho_2[1 - \frac{\kappa - 1}{2\ \kappa}\frac{1}{R\ T_2}(c_2^2 - c_1^{2*})]^{\frac{1}{\kappa-1}}$

$\varrho_2 = \frac{p_2}{R\ T_2} = \frac{0{,}196\ 10^5}{287\ 617{,}5} = 0,1106\ \frac{kg}{m^3}$

$c^* = \sqrt{\kappa\ R\ T^*} = \sqrt{1,295\ 287\ 923,8} = 585,96\ \frac{m}{s} \approx\ \underline{\underline{586\ \frac{m}{s}}}$

$\varrho^* = 0,1106\ [1 - \frac{0{,}295}{2{,}49}\frac{1}{287\ 617{,}5}(586^2 - 1056^2)]^{\frac{1}{0{,}295}} = \underline{\underline{0,4332\ \frac{kg}{m^3}}}$

$A^* = \frac{\dot{m}}{\varrho^*\ c^*} = \frac{249{,}72}{0{,}4332\ 586} = \underline{\underline{0,9837\ m^2}}$