Universität Hannover
Institut für Strömungsmaschinen
Prof. Dr.-Ing. J .Seume

Klausur Frühjahr 2004

„Strömungsmechanik I“

Bearbeitungsdauer: PO 2000 : 90 min

zugelassene Hilfsmittel:

Taschenrechner
Formelsammlung-IfS, ohne handschriftliche Ergänzungen
Lineal und Schreibmaterial
mitgebrachtes Papier

weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen
Die zu verwendenden Indices sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen.

Name	Vorname	Matr. Nummer

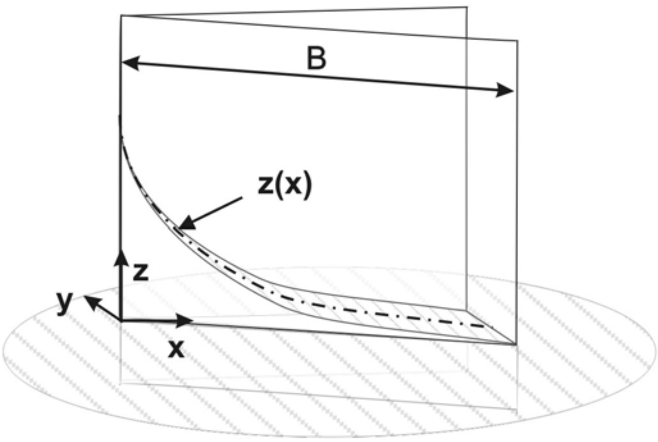
	mögliche Punktezahl	erreichte Punktezahl
Aufgabe 1	24	
Aufgabe 2	36	
Aufgabe 3	25	
Gesamt	85/80	
	Note	

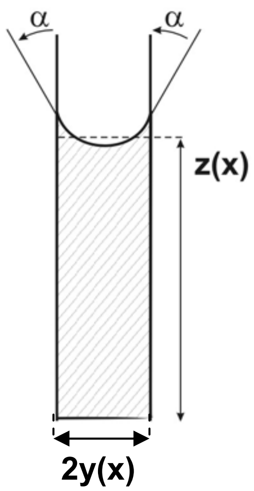
Viel Erfolg!

Kurzfrage 1a)

In einem ausgedehnten Wasserbehälter grenzen zwei Glasplättchen der Breite B unter einem Winkel β aneinander, so dass sie einen Glaskeil bilden.

Die Oberflächenspannung werde mit σ bezeichnet. Der Randwinkel an der Grenzfläche zwischen Wasser und Glas betrage α.





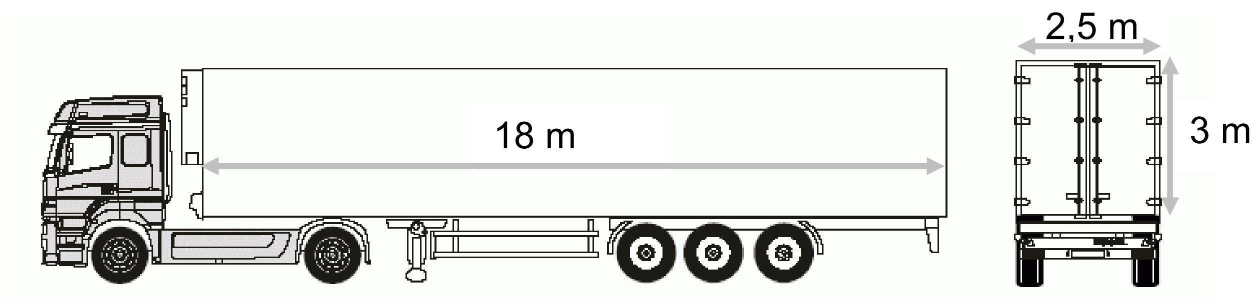
Leiten Sie den Verlauf z(x) der Wasseroberfläche zwischen den Glasscheiben her.

Gegeben: α, β, σ, B

(6 Punkte)

Kurzfrage 1b)

Die beiden Seitenwände und das Dach eines LKW-Sattelanhängers können bei entsprechend guter Strömungsführung durch die Zugmaschine und deren Anbauteile vereinfacht als eben angeströmte Platten betrachtet werden, die vom Fahrtwind mit u_∞=95 km/h angeströmt werden. Die Zugmaschine soll nicht betrachtet werden. Sie dient lediglich zur Strömungsführung.

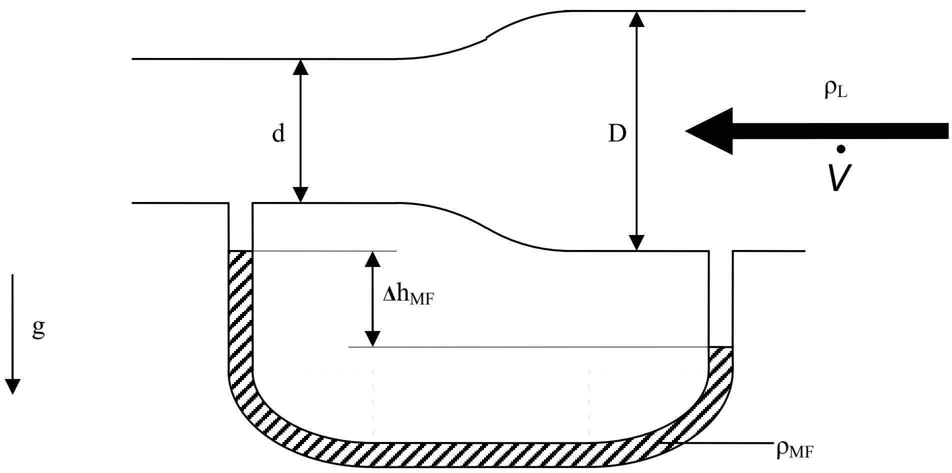


Gegeben: $Re_{krit} = 8{,}6 \cdot 10^5$; $l = 18$ m; $b = 2{,}5$ m; $h = 3$ m; $\nu_L = 15{,}3 \cdot 10^{-6}$ m²/s;
$\rho_L = 1{,}225$ kg/m³; $u_\infty = 95$ km/h

a) Berechnen Sie die Lage des Umschlagpunktes x_U von laminarer zu turbulenter Grenzschichtströmung.
b) Berechnen Sie den Reibungswiderstand. Beachten Sie dabei den laminar / turbulenten Umschlag. Der Druckwiderstand soll nicht berechnet werden.

(11 Punkte)

Kurzfrage 1c)

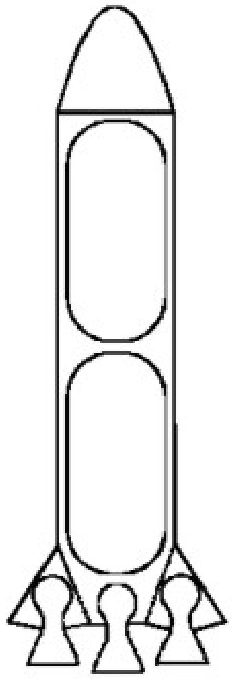


Gegeben: $D = 0{,}5$ m; $d = 0{,}3$ m; $\Delta h_{MF} = 10$ mm; $\rho_{MF} = 13645$ kg/m³;
$\rho_L = 1{,}2$ kg/m³; $g = 9{,}81$ m/s²

Mit der dargestellten Düse soll der durchströmende Luftvolumenstrom $\dot{V}$ bestimmt werden. Dazu wird die statische Druckdifferenz zwischen den beiden Querschnitten mit einem U-Rohr bestimmt. Bestimmen Sie den Luftvolumenstrom. Aufgrund der sanften Übergänge kann von einer verlustfreien (also ohne Ablösungen) Strömung ausgegangen werden. Durch die geringe Druckdifferenz kann die Strömung vereinfacht als inkompressibel betrachtet werden.

(7 Punkte)

Aufgabe 2)



In einer mit mehreren Triebwerken ausgestatteten Flüssigkeitsrakete wird Methanol mit flüssigem Sauerstoff verbrannt. Die Verbrennungsgase, die einen Ruhedruck von p_0=15 bar und eine Ruhetemperatur von T_0=2800 K besitzen, treten aus der Brennkammer durch eine Lavaldüse in die Umgebung aus und werden dabei auf Überschallgeschwindigkeit beschleunigt. Der durch jeden Antrieb hindurchtretende Massenstrom betrage $\dot{m} = 158\ \text{kg/s}$.

Für die Bearbeitung der Aufgabe dürfen die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden: Die Verbrennungsgase verhalten sich wie ein ideales Gas. Die Strömung sei adiabat und reibungsfrei und ihre Geschwindigkeit sei homogen über die Strömungsquerschnitte verteilt.

Alle Aufgabenteile müssen unabhängig voneinander gelöst werden.

Gegeben:

Verbrennungsgase:	Brennkammer:	Lavaldüse:
$R = 311\ \text{J/(kgK)}$	$p_0 = 15\ \text{bar}$	$\dot{m} = 158\ \text{kg/s}$
$\kappa = 1{,}2$	$T_0 = 2800\ \text{K}$	(gültig für alle Aufgabenteile)

a) Erklären Sie anhand einer Skizze die Funktionsweise einer Lavaldüse. Nehmen Sie dabei die folgende Beziehung zu Hilfe, die sich aus der Bernoulli-Gleichung für kompressible Fluide und der Kontinuitätsgleichung ableiten lässt:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{dc}{dx} = \frac{1}{\left(Ma^2-1\right)}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{dA}{dx}.$$

Kennzeichnen Sie die Strömungsrichtung sowie die Bereiche unterschiedlicher Machzahlen.

Skizzieren Sie den Verlauf von p/p_0 längs der Lavaldüse im Auslegungspunkt, d.h. für den Fall, dass innerhalb der Düse eine vollständige Expansion auf Umgebungsdruck erreicht wird. Welcher Effekt tritt hinter der Düse auf, wenn der Austrittsdruck der Düse über dem Umgebungsdruck liegt?

(6 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Durchmesser D* im engsten Querschnitt der Düse.

(12 Punkte)

c) Die Verbrennungsgase treten mit einer Machzahl von Ma_2=3 aus der Lavaldüse aus. Welche Temperatur T_2 , welche Geschwindigkeit c_2 und welcher Druck p_2 herrschen im Austrittsquerschnitt? Bestimmen Sie die Fläche des Austrittsquerschnitts A_2.

(13 Punkte)

d) Die Austrittsgeschwindigkeit c_2 der Gase bei Betrieb der Lavaldüse im Auslegungspunkt beträgt 2300 m/s. Wieviele Triebwerke würden benötigt, um einen Gesamtschub von mindestens 400000N zu erzeugen?

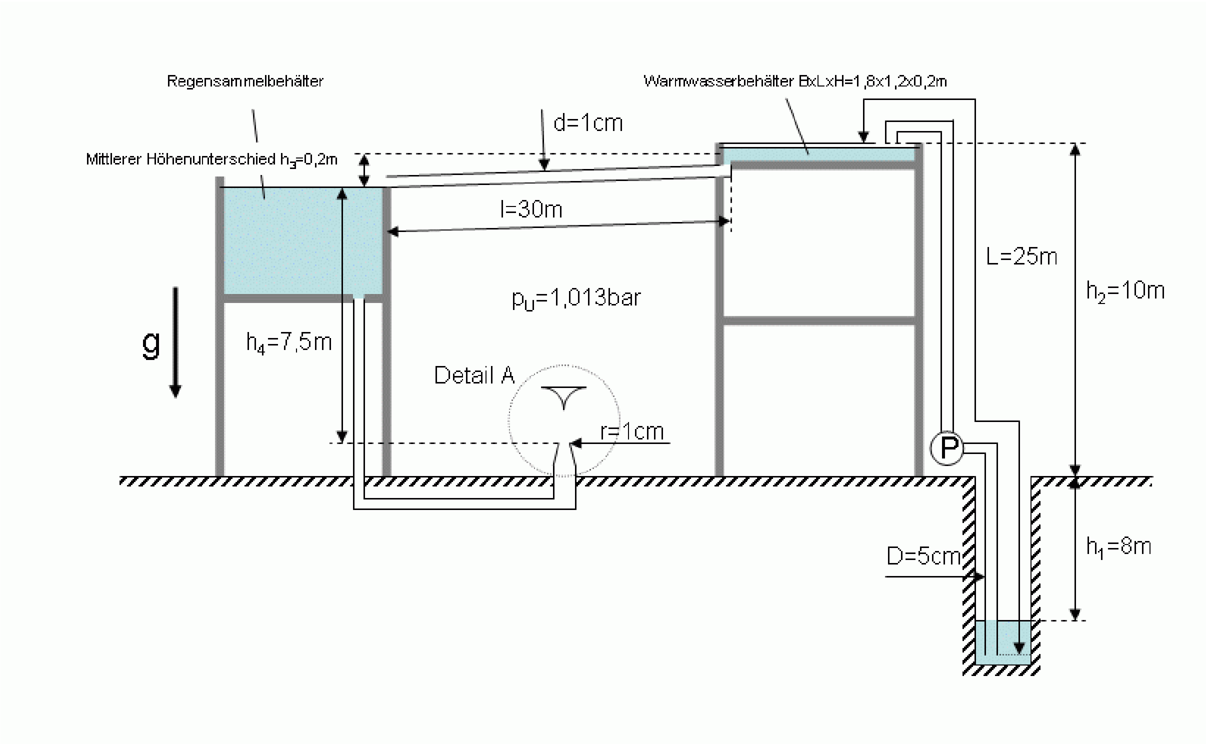
(5 Punkte)

Aufgabe 3)

In südlichen Ländern wird die Warmwasserversorgung von Wohnhäusern häufig über dunkle Hochbehälter auf dem Hausdach bereitgestellt. Dieser Behälter ist sehr niedrig, hat aber eine große Grundfläche, um das Wasser schnell aufzuwärmen (B x L x H = 1,8 x 1,2 x 0,2 m). Dieser Behälter ist über eine Leitung mit einem Regenwassersammelbehälter verbunden. Einmal wöchentlich wird der Warmwasserbehälter entleert, um Verschmutzung und Bakterien vorzubeugen. Aus dem Regenbehälter wiederum führt ein Fallrohr zu einem Rasensprenger.

Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar, mit Ausnahme von d).

Gegeben: $p_U = 1{,}013$ bar $\rho = 1000$ kg/m³ $\nu = 1{,}004 \cdot 10^{-6}$ m²/s



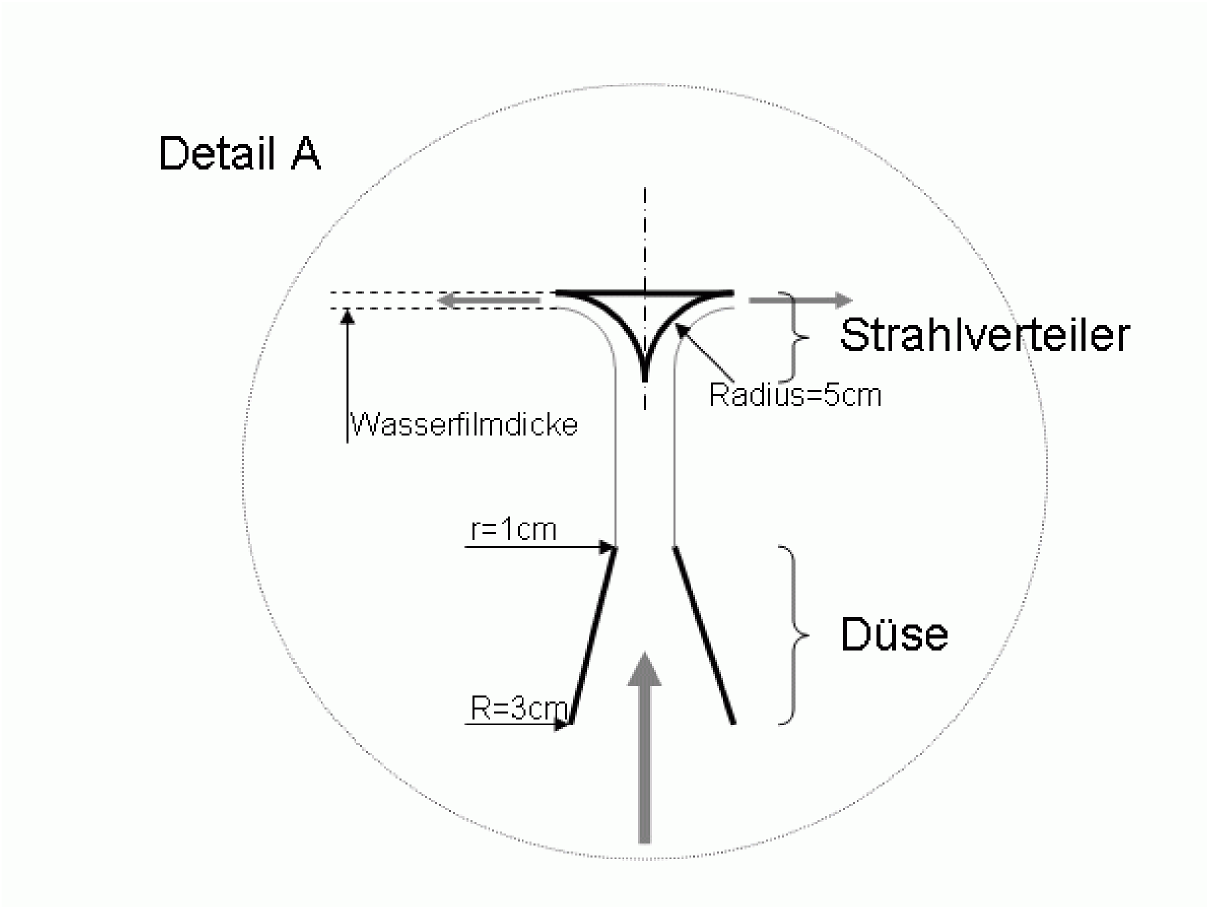
a) Der Wasserspiegel in dem Warmwasserbehälter wird über einen Schwimmerschalter und eine Pumpe konstant gehalten. Die Strömung sei reibungsbehaftet und inkompressibel. Die Rohrlänge betrage l = 25 m. Das Wasser wird aus einem Brunnen gefördert, dessen Wasserhöhe konstant ist. Berechnen Sie die notwendige Pumpleistung.

   Gegeben: D = 5 cm L = 25 m Re = $2 \cdot 10^5$ $k_S = 0{,}002$m

(11 Punkte)

Für die nächsten beiden Teilaufgaben kann der Einfluss der Erdbeschleunigung auf das Wasser in der Düse (siehe Detail A, unten) vernachlässigt werden.

b) Aus dem Regenbehälter führt ein Fallrohr zu einem Rasensprenger. Die Strömung im Fallrohr sei reibungsfrei. Am Ende des Fallrohres befindet sich eine Düse mit der Eintrittsgröße R = 3 cm und einer Austrittsgröße r = 1 cm. Der Höhenunterschied zwischen Düsenaustritt und Wasseroberfläche, der aufgrund der Größe des Regenwasserbehälters, als konstant betrachtet werden kann, beträgt h_4 = 7,5 m. Die Höhe der Düse ist im Vergleich zu h_4 vernachlässigbar. Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit an der Düse? Wie groß ist der Überdruck im Eintritt der Düse? Welche Zugkraft muss das Gewinde zwischen Düse und Schlauch aushalten?



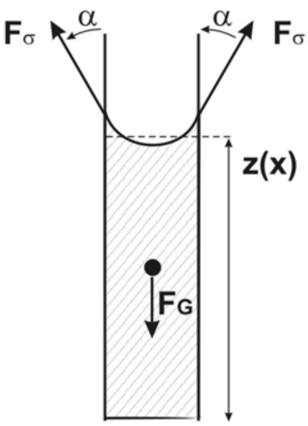
(10 Punkte)

c) Der Wasserstrahl tritt anschließend auf einen rotationssymetrischen Strahlverteiler. Die Umlenkung des Wasserstrahls beträgt genau 90° und der Radius = 5 cm. Wie dick ist der Wasserfilm, kurz vor dem Ablösen vom Strahlverteiler? Wie schwer muss dieses Teil sein, damit es gerade schwebt?

(4 Punkte)

Musterlösung Klausur F 2004

Kurzfrage 1a)



KGG in vertikaler Richtung an einem Scheibenelement der Dicke dx:

$$2 \cdot F_\sigma \cdot \cos\alpha = F_G$$

$$2 \cdot \sigma \cdot \frac{dx}{\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \cos\alpha = dm \cdot g$$

Mit $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot z(x) \cdot b(x) \cdot dx$:

$$2 \cdot \sigma \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}} = \rho \cdot z(x) \cdot b(x) \cdot g$$

$$z(x) = \frac{2\sigma \cdot \cos\alpha}{\rho \cdot b(x) \cdot g \cdot \cos\frac{\beta}{2}}$$

Herleitung des Plattenabstands b(x) aus den Geometrieangaben:

Ansatz: $b(x)=k_1x+k_2$

RB: $b(x=0)=0$, daher $k_2=0$

$$b(x = B \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)) = 2 \cdot B \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$, folglich $k_1 = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}$

Damit ergibt sich für den Abstand der Glasplatten $b(x) = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot x$

und somit für den gesuchten Verlauf der Wasseroberfläche:

$$\underline{\underline{z(x) = \frac{\sigma \cdot \cos\alpha}{\rho \cdot g \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot x}}}$$

Kurzfrage 1b)

a) $$\mathrm{Re}_{krit} = \frac{u_\infty x_u}{\nu}$$

umstellen

$$x_u = \frac{\mathrm{Re}_{krit}\,\nu}{u_\infty}$$

einsetzen

$$x_u = \frac{8{,}6 * 10^5 * 15{,}3 * 10^{-6} * 3{,}6}{95} m = \underline{\underline{0{,}5m}}$$

b) $$F_W = F_{W_{lam}} + F_{W_{turb}}$$

$F_W = F_{W,R} + F_{W,D}$

$F_{W,D}$ kann vernachlässigt werden

$$F_R = c_W \frac{\rho}{2} u_\infty^2 A$$

$$c_{W_{lam}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_{lam}}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\frac{u_\infty x_u}{\nu}}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_{krit}}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{8{,}6 * 10^5}} = \underline{\underline{1{,}43 * 10^{-3}}}$$

$$c_{W_{turb}} = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_{turb}}} = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{\frac{u_\infty (l - x_u)}{\nu}}} = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{\frac{95 \cdot 17{,}5}{3{,}6 * 15{,}3 * 10^{-6}}}} = \underline{\underline{2{,}36 * 10^{-3}}}$$

$$F_W = \frac{\rho}{2} u_\infty^2 (2 * h + b)\left[c_{W_{lam}} * x_u + c_{W_{turb}} * (l - x_u)\right]$$

$$F_W = \frac{1{,}225}{2}\left(\frac{95}{3{,}6}\right)^2 (2 * 3 + 2{,}5)\left[1{,}43 * 10^{-3} * 0{,}5 + 2{,}36 * 10^{-3} * (18 - 0{,}5)\right] N = \underline{\underline{152N}}$$

Kurzfrage 1c)

Die Luftsäule ist gegenüber der Messflüssigkeitssäule zu vernachlässigen.

Bernoulli vom großen nach kleinen Querschnitt:

$$\frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + \cancel{gz}_1 = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + \cancel{gz}_2$$

fällt heraus wegen gleicher Höhe

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_L} = \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2}$$

Druckdifferenz aus Hydrostatik: $p_1 - p_2 = g\Delta h_{MF}\rho_{MF}$

Konti: $A_1 c_1 \cancel{\rho_L} = A_2 c_2 \cancel{\rho_L}$

umgestellt nach $c_2 = c_1 \frac{A_1}{A_2} = c_1 \frac{\pi D^2}{4} \frac{4}{\pi d^2}$

Quadriert: $c_2^2 = c_1^2 \frac{D^4}{d^4}$

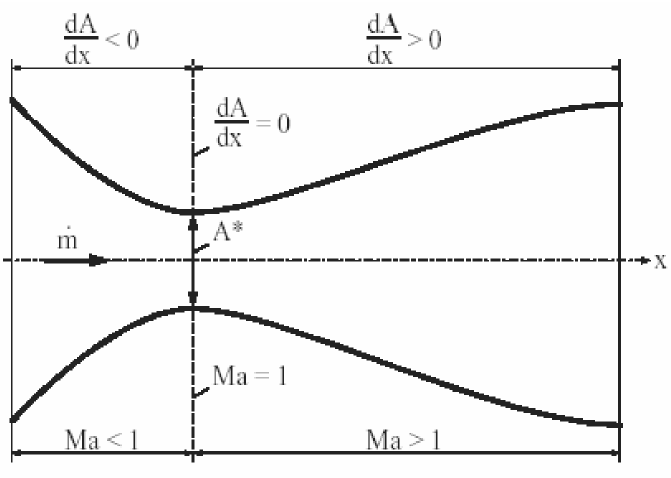
=> eingesetzt in Bernoulli: $\frac{g\Delta h_{MF}\rho_{MF}}{\rho_L} = \frac{c_1^2}{2}\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h_{MF}\rho_{MF}}{\rho_L\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)}} = \underline{18{,}226\, m/s}$$

$$\dot{V} = c_1 \pi \frac{D^2}{4} = \underline{\underline{3{,}58\, m^3/s}}$$

Aufgabe 2)

a) Skizze:



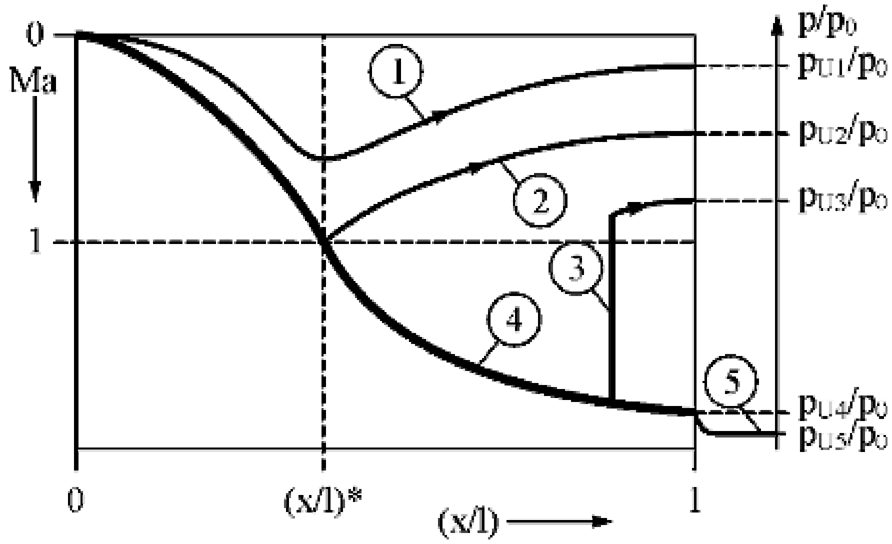
Die Lavaldüse dient dazu, eine Unterschallströmung auf Überschallgeschwindigkeit zu beschleunigen.
Entsprechend der Beziehung $\frac{1}{c}\cdot\frac{dc}{dx}=\frac{1}{\left(Ma^2-1\right)}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{dA}{dx}$ ist zum Erzielen eines positiven

Geschwindigkeitsgradienten $\frac{dc}{dx}>0$

- im Unterschallbereich (Ma<1) eine Querschnittsverengung $\frac{dA}{dx}<0$ und
- im Überschallbereich (Ma>1) eine Querschnitterweiterung $\frac{dA}{dx}>0$ nötig.

Die Lavaldüse besteht daher aus einem konvergenten und einem divergenten Teil. Zur Beschleunigung des Fluids in den Überschallbereich muss im engsten Querschnitt der Düse gerade Schallgeschwindigkeit erreicht werden.

Verlauf p/p_0:



Der Druckverlauf im Auslegungspunkt entspricht Fall 4. Liegt der Umgebungsdruck noch unterhalb des Düsenaustrittsdruckes, kommt es hinter der Düse zu einer Nachexpansion des Fluids und damit zum Aufplatzen des austretenden Strahls.

b) Aufgabenstellung gibt Beschleunigung in den Überschallbereich vor, es muss also über dem konvergenten Teil der Düse das kritische Druckverhältnis π^* herrschen:

$$\pi^* = \left(\frac{p}{p_0}\right)^+ = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{2{,}2}\right)^{\frac{1{,}2}{0{,}2}} = \underline{0{,}5645}$$

Ausflussfunktion Ψ^* beim kritischen Druckverhältnis:

$$\Psi^* = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1}\left[\left(\pi^*\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\pi^*\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]} = \sqrt{\frac{1{,}2}{0{,}2}\left[(0{,}5645)^{\frac{2}{1{,}2}} - (0{,}5645)^{\frac{2{,}2}{1{,}2}}\right]} = \underline{0{,}4586}$$

Massenstrom:

$$\dot{m} = A^* \cdot \sqrt{2p_0\rho_0} \cdot \Psi^* = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{RT_0}} \cdot \Psi^*$$

Umstellen nach dem gesuchten Durchmesser:

$$D^* = \sqrt{\frac{4\dot{m}}{\pi\Psi^*}\sqrt{\frac{RT_0}{2}}} = \sqrt{\frac{4\cdot 158\ \mathrm{kg/s}}{\pi\cdot 0{,}4586}\sqrt{\frac{311\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}\cdot 2800\mathrm{K}}{2}}} = \underline{\underline{0{,}4393\ \mathrm{m}}}$$

c)

$$T_2 = \frac{T_0}{1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot Ma_2^2} = \frac{2800\mathrm{K}}{1+\frac{0{,}2}{2}\cdot 9} = \underline{\underline{1473{,}7\ \mathrm{K}}}$$

Aus $Ma_2 = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_2}{\sqrt{\kappa R T_2}}$ lässt sich c_2 bestimmen:

$$c_2 = Ma_2 \cdot \sqrt{\kappa R T_2} = 3\cdot\sqrt{1{,}2\cdot 311\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}\cdot 1473{,}7\mathrm{K}} = \underline{\underline{2224{,}8\ \mathrm{m/s}}}$$

$$p_2 = \frac{p_0}{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot Ma_2^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \frac{15\ \mathrm{bar}}{\left(1+\frac{0{,}2}{2}\cdot 9\right)^6} = \underline{\underline{0{,}319\ \mathrm{bar}}}$$

Die Fläche des Austrittsquerschnitts ergibt sich aus der Konti-Gleichung:

Wegen $\dot{m} = \rho_2 A_2 c_2 = \frac{p_2}{RT_2} A_2 c_2$ gilt

$$A_2 = \frac{\dot{m} R T_2}{p_2 c_2} = \frac{158\,\mathrm{kg/s} \cdot 311 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}} \cdot 1473{,}7\,\mathrm{K}}{0{,}319 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 2224{,}8\,\mathrm{m/s}} = \underline{\underline{1{,}021\,\mathrm{m}^2}}$$

d) Betrieb im Auslegungspunkt: keine Nachexpansion, daher kein Druckschub sondern nur Schub durch austretenden Massenstrom

Der Schub eines Triebwerks beträgt dann

$$F_S = \rho_2 A_2 c_2^2 = \dot{m} \cdot c_2 = 158\,\mathrm{kg/s} \cdot 2300\,\mathrm{m/s} = \underline{363400\ \mathrm{N}}.$$

Für eine Gesamtschubkraft von über 400000N werden also mindestens <u>zwei Triebwerke</u> benötigt.

Aufgabe 3)

a)

$$c_2 = \frac{Re * \nu}{D} = \frac{2*10^5 * 1{,}004*10^{-6}\,m}{0{,}05\,s} = 4{,}016\,m/s$$

$$\dot{V} = c_2 \frac{\pi}{4} D^2 = 4{,}016 * \frac{\pi}{4} 0{,}05^2\,m^3/s = \underline{7{,}9*10^{-3}\,m^3/s}$$

λ aus Moody Diagramm: $\frac{k_S}{D} = \frac{0{,}002}{0{,}05} = 4*10^{-2}$ => λ = 0,065

$$\Delta p_{V_{12}} = \lambda \frac{l}{D}\frac{\rho}{2} c_2^2 = 0{,}065 \frac{25}{0{,}05}\frac{1000}{2} 4{,}016^2\,Pa = \underline{262084\,Pa}$$

$$\cancel{\frac{c_1^2}{2}} + \cancel{\frac{p_1}{\rho}} + g z_1 + \frac{P_{12}}{\rho \dot{V}} = \frac{c_2^2}{2} + \cancel{\frac{p_2}{\rho}} + g z_2 + \frac{\Delta p_{V_{12}}}{\rho}$$

$=0 \qquad =$

$$P_{12} = \rho \dot{V}\left(\frac{c_2^2}{2} + \frac{\Delta p_{V_{12}}}{\rho} + g(z_2 - z_1)\right)$$

$$P_{12} = 1000 * 7{,}9*10^{-3}\left(\frac{4{,}016^2}{2} + \frac{262084}{1000} + 9{,}81 * 18\right) W = \underline{\underline{3529{,}15\,W}}$$

b)

$=$ $\qquad = 0$

$$\cancel{\frac{p_U}{\rho}} + \frac{c_R^2}{2} + g h_4 = \cancel{\frac{p_U}{\rho}} + \frac{c_2^2}{2} + gh \Rightarrow c_2 = \sqrt{2gh_4} = \sqrt{2 * 9{,}81 * 7{,}5}\,\frac{m}{s} = \underline{\underline{12{,}13\,\frac{m}{s}}}$$

$$\dot{m} = A_1 c_1 \rho = A_2 c_2 \rho \Rightarrow c_1 = c_2 \frac{A_2}{A_1} = c_2 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = 12{,}13\left(\frac{0{,}01}{0{,}03}\right)^2 \frac{m}{s} = \underline{1{,}348\,\frac{m}{s}}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_U}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} \Rightarrow p_1 = p_U + \rho\left(\frac{c_2^2 - c_1^2}{2}\right)$$

$$p_1 = 101300 + 1000\left(\frac{12{,}13^2 - 1{,}348^2}{2}\right) Pa = \underline{\underline{173960\,Pa}}$$

$$\dot{m} = A_1 c_1 \rho = \pi R^2 c_1 \rho = \pi 0{,}03^2 * 1{,}348 * 1000\,kg/s = \underline{3{,}8114\,kg/s}$$

$$\sum F_y = 0 = p_1 A_1 + \dot{m} c_1 - F - \dot{m} c_2 - p_U A_2 - p_U (A_1 - A_2)$$

$$\Rightarrow F = A_1 (p_1 - p_U) + \dot{m}(c_1 - c_2) = \pi 0{,}03^2 (173960 - 101300)$$

$$+ 3{,}8114(1{,}348 - 12{,}13) N = \underline{\underline{164\,N}}$$

c) Bernoulli: aufgeteilter Stromfaden => $c_e = c_a$

$$\dot{V} = c_e A_e = c_a A_a \Rightarrow A_e = A_a \Rightarrow \pi r^2 = 2\text{Radius}\,\pi * D$$

$$D = \frac{r^2}{2\text{Radius}} = \frac{0{,}01^2}{2 * 0{,}05}\,\text{m} = \underline{\underline{0{,}001\text{m}}}$$

$$\sum F_y = 0 = \dot{m}\,c_e - F_G + p_U A_e + p_U\left(A_R - A_e\right) - p_U A_R$$

$$\Rightarrow m = \frac{\dot{m}\,c_e}{g} = \frac{3{,}8114 * 12{,}13}{9{,}81}\,\text{kg} = \underline{\underline{4{,}713\text{kg}}}$$