Leibniz Universität Hannover
Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik
Prof. Dr.-Ing. J .Seume

Klausur Frühjahr 2007

„Strömungsmechanik I“

Bearbeitungsdauer PO 2000: 90 min

zugelassene Hilfsmittel:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- TFD-Formelsammlung (ohne handschriftliche Ergänzungen)
- Lineal und Schreibmaterial
- mitgebrachtes Papier

weitere Hinweise: Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.
Beschriften Sie jedes Blatt mit Name und Matrikelnr.

Name	Vorname	Matr. Nummer

	mögliche Punktezahl	erreichte Punktezahl
Aufgabe 1	16	
Aufgabe 2	27	
Aufgabe 3	17	
Gesamt	60	
	Note	

!!Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar!!

Viel Erfolg!

Kurzaufgabe 1a.) 7Punkte

Mittels einer Prandtl-Sonde mit <u>zylindrischem Schaft</u> soll in einem Strömungskanal nach Abbildung 1 der Volumenstrom bestimmt werden. Die Luftströmung sei kompressibel und isentrop. Es kann von einer über dem Kanalquerschnitt konstanten Axialgeschwindigkeit ausgegangen werden.

Gegeben: p_{tot}=1,5bar; p_{stat}=1bar; d=10mm; D=300mm; T_0=300K; κ=1,4; R=287J/(kg·K)

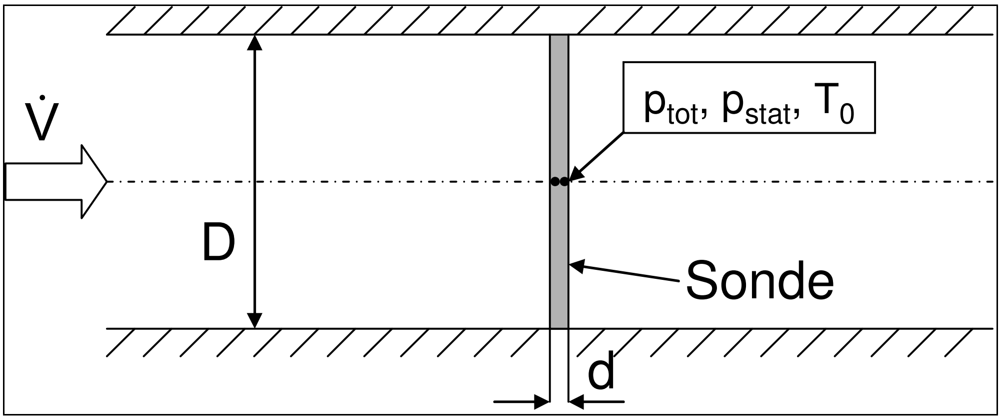


Abbildung 1

Kurzaufgabe 1b.) 5Punkte

In einem Wasserkraftwerk steht eine Turbine, die einen Volumenstrom von 10.000Liter/s verarbeitet. Die Zuleitung hat einen Durchmesser von 1,2m und es herrscht in der Zuleitung ein statischer Druck von 6bar. Die Strömung sei inkompressibel und isentrop. Berechnen Sie:

1.) Geschwindigkeit des Wassers in der Zuleitung

2.) Durchmesser des Düsenaustritts, wenn der statische Druck an der Düsenöffnung noch 1bar beträgt

3.) Druckbelastung auf das Schnellschlussventil, die auftritt, wenn das Ventil am Düsenaustritt wegen einer Störung sofort geschlossen werden muss.

Gegeben: $p_{stat,Zuleitung}$=6bar; $D_{Zuleitung}$=1,2m; ρ=1000kg/m³; $\dot{V}$=10.000Liter/s; $p_{stat,\ Austritt}$=1bar

---

Kurzaufgabe 1c.) 4Punkte

Gegeben ist eine Apparatur nach Abbildung 2 zur Messung von Oberflächenspannungen mittels der Blasendruckmethode. Der Gasdruck p_0 im linken Schenkel des U-Rohres wird solange erhöht, bis sich an der Öffnung des Kapillarröhrchens (Versuchsgas) in den Wasserbehälter eine halbkugelförmige Oberfläche aufgrund der Oberflächenspannung zwischen Versuchsgas und Wasser geformt hat. Berechnen Sie die Oberflächenspannung der Flüssigkeit, welche die Halbkugel formt.

Die Auswirkungen der Oberflächenspannung in den Schenkeln des U-Rohres (Alkohol) sowie der Schwerkrafteinfluss der Gase können vernachlässigt werden.

Gegeben: D, g, $\rho_{Alkohol}$, ρ_{Wasser}, p_0, p_u; H; Δh

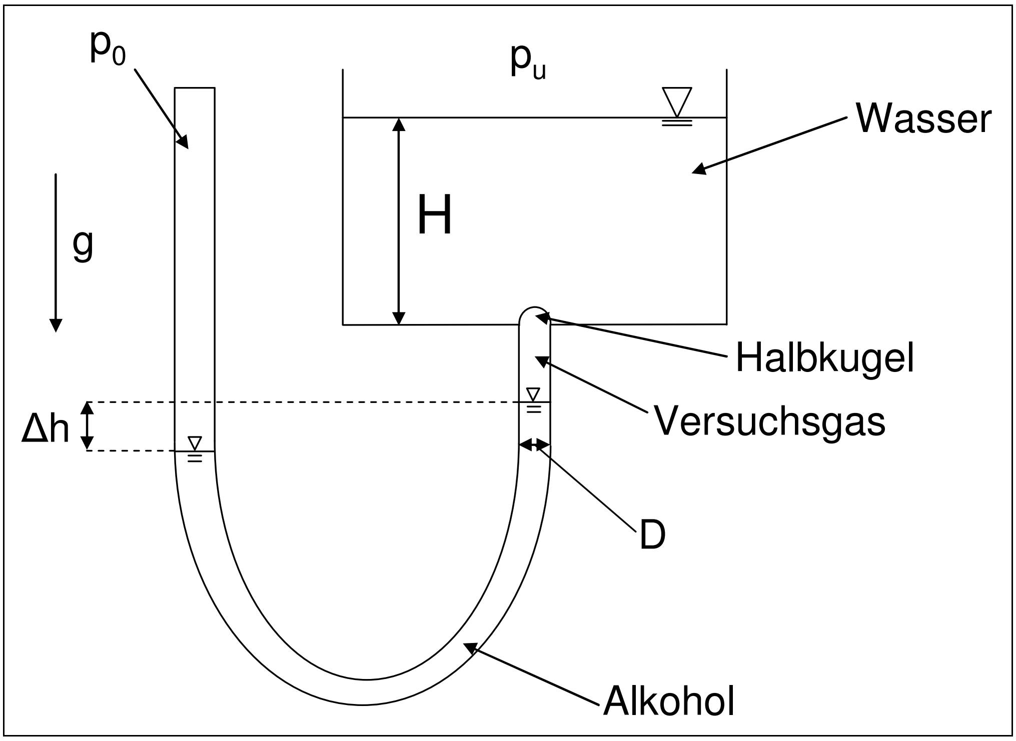


Abbildung 2

Aufgabe 2.) 27Punkte

Römischer Badetrog

In Abbildung 3 ist ein römischer Badetrog zu sehen. Die Badeeinrichtung besteht aus einer Halbkugel, die den Boden bildet und einem vertikalen Zylinder. Im Boden der Halbkugel befindet sich ein Abfluß mit dem Durchmesser d_1. Über eine mechanische Pumpe (P) kann das Wasser vom Abfluß nach oben in einen Duschkopf (D) gefördert werden, wenn der Absperrhahn (A), welcher als 3-Wege-Ventil ausgeführt ist, geöffnet wird. Frischwasser kann aus einem unendlich großen Becken angesaugt werden. Die Zuleitung zum Becken kann mittels eines Schiebers (S) abgetrennt werden. Die Rohrleitung hat bis zur Pumpe den konstanten Durchmesser d_1 und von der Pumpe (P) bis zum Duschkopf (D) den konstanten Durchmesser d_2.

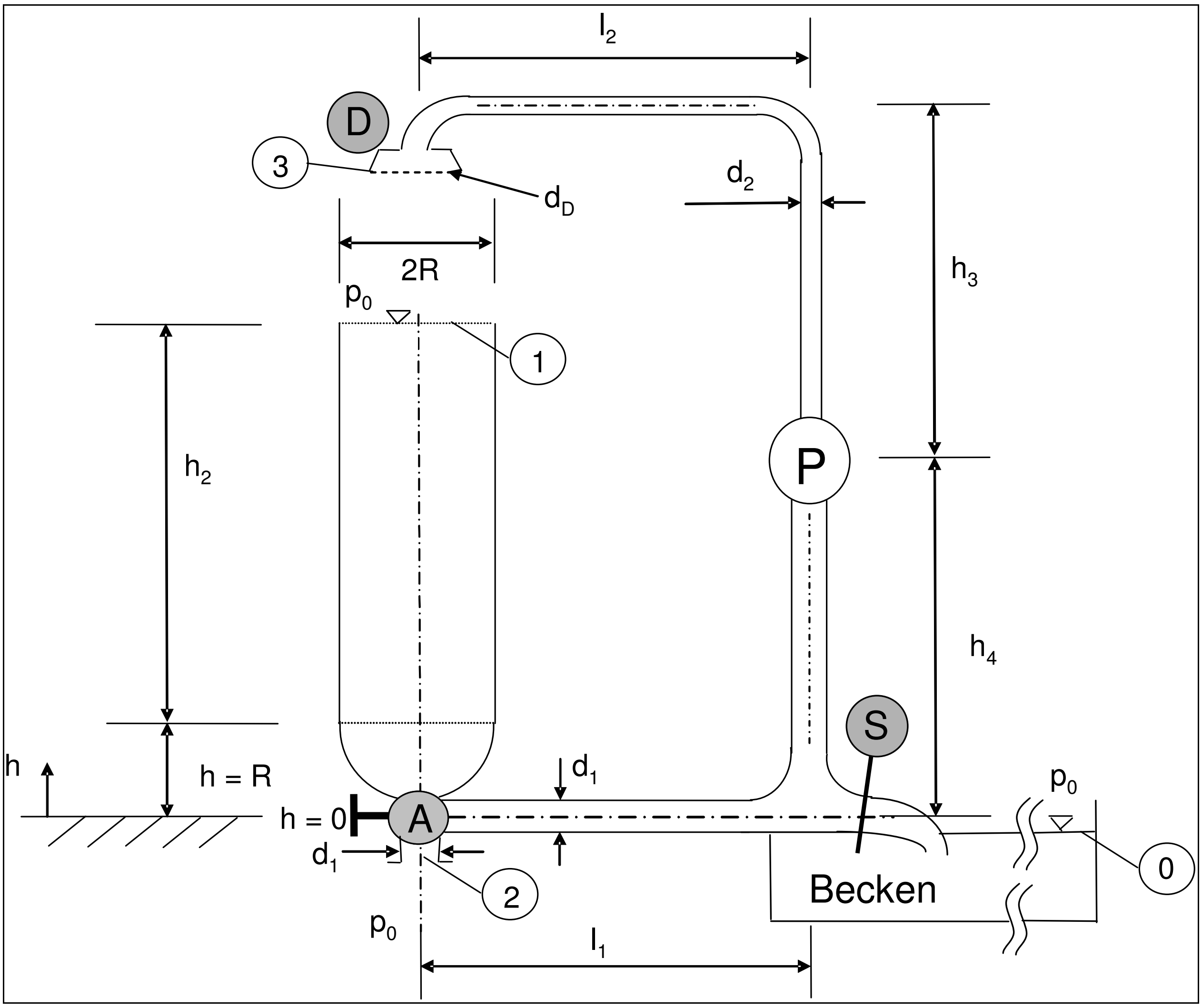


Abbildung 3

2.1) Pumpenleistung (4Punkte)

Der gesamte Badetrog wird nun gefüllt, indem der Hahn A so geschaltet wird, dass Frischwasser aus dem Becken von der Ebene h = 0 angesaugt und über die Pumpe zum Duschkopf gefördert wird. Berechnen Sie die mechanische Leistungsaufnahme $P_{Leistung;0,2}$ der Pumpe für einen gegebenen Wirkungsgrad $\eta_{Pumpe;0.2}$. Die Fülldauer des Badetroges (Volumen $V_{Badetrog}$) beträgt $t_{Badetrog}$.

Die Strömung sei stationär, reibungsfrei und inkompressibel.

Gegeben: g, d_D, h_3, h_4, $V_{Badetrog}$, $t_{Badetrog}$, ρ, $\eta_{Pumpe;0,2}$

2.2) Rohrreibung (10Punkte)

Der Badetrog ist bis zur Hälfte des Zylinders gefüllt (Annahme: ruhende Oberfläche) und die Pumpe fördert im Kreis. Dazu wird der Schieber S geschlossen und Ventil A entsprechend geschaltet. Die Rohrleitung von der Pumpe bis zum Duschkopf sei nicht hydraulisch glatt, sondern sandrauh (k_s), wobei der Einfluß der Rohrbögen vernachlässigt wird. Wie viel mechanische Leistung muss die Pumpe aufnehmen, um einen konstanten Massenstrom $\dot{m}$ zu fördern?

Die Strömung sei inkompressibel.

Gegeben: $g=9{,}81\ m/s^2$; $d_D=0{,}1m$; $d_2=0{,}05m$; $h_2=0{,}5m$; $h_3=1m$; $h_4=2m$; $R=1m$; $l_2=1m$

$\rho_{Wasser}=1000kg/m^3$; $k_s=2\cdot 10^{-3}$ **m**; $\nu=1\cdot10^{-6}m^2/s$; $\dot{m}=2kg/s$

2.3) Ausströmvorgang (13Punkte)

Der Badetrog ist bis zur Höhe h_2 gefüllt und wird geleert, d.h., der Hahn A wird geöffnet und das Wasser strömt vertikal nach unten aus. Wie groß ist die Ausströmgeschwindigkeit $c_2(t)$? Wie lange dauert der Entleerungsvorgang des gesamten Troges?

Die Strömung sei reibungsfrei und inkompressibel.

Hinweis: $R >> d_1$; $\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\cdot\sqrt{x}$

Gegeben: R, g, d_1, h_2,

Aufgabe 3.) 17Punkte

Beschichtung einer Folie

Eine Folie der Breite B soll mit einer Newton'schen Flüssigkeit beschichtet werden (siehe Abbildung 4). Dazu wird das Band mit der Breite B über zwei Rollen mit dem Radius R geführt. Eine der beiden Rollen wird mit einem Elektromotor (M_{An}, ω) angetrieben, der <u>nur</u> zur Überwindung der Flüssigkeitsreibung dient. Der Flüssigkeitsstand h im Becken ist zeitlich unabhängig und für alle Aufgabenteile als konstant anzunehmen. Die Folie befindet sich auf der Länge L im Kontakt mit der Flüssigkeit. Die Strömung sei für alle Aufgabenteile inkompressibel. Die Flüssigkeit haftet an der Folie.

Folgende festgelegte Bezeichnungen sind zu verwenden: Richtungsvektor x_i=(x,y,z) und Geschwindigkeitsvektor u_i=(u,v,w).

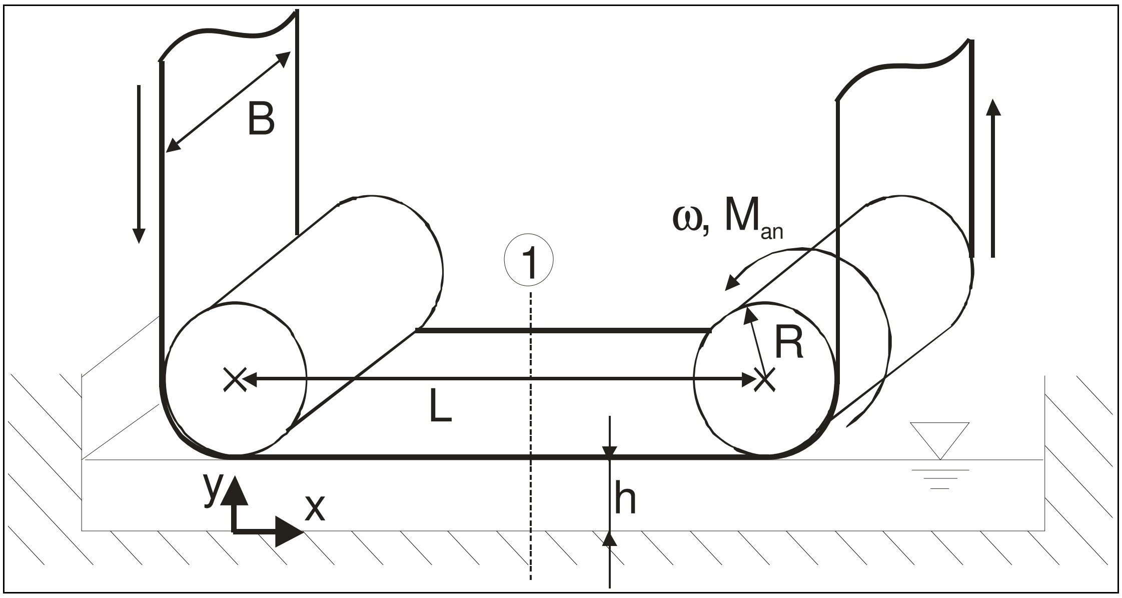


Abbildung 4

3.1) Strömungsform (3Punkte)

Zeichnen Sie das Geschwindigkeitsprofil $u(y)$ sowie das Schubspannungsprofil $\tau(y)$ an der Stelle 1. Nennen Sie den Namen dieser Strömungsform.

3.2) Reibmoment (4Punkte)

Berechnen Sie die nötige mechanische Reibleistung, die der Elektromotor erbringen muss.

Gegeben: ω=0,5Hz; R=20cm; B=1m; L=3m; ν=0,135m²/s; ρ=850kg/m³; h=10mm

3.3) Herleitung des Geschwindigkeitsprofils (10Punkte)

Um eine gute Durchmischung der Flüssigkeit und einen konstanten Füllstand *h* zu gewährleisten, wird das Fluid in der Wanne mit einer Umwälzpumpe bewegt. Dadurch wird der Strömung unter der Folie ein konstanter Druckgradient $-\frac{\partial p}{\partial x}$ aufgeprägt. Des Weiteren können Ein- und Auslaufeffekt sowie Randeffekte vernachlässigt werden. Die Strömung sei stationär.

Leiten Sie die Differentialgleichung zur Berechung des Geschwindigkeitsprofils $u(y)$ zwischen der Folie und dem Beckenboden an der Stelle 1 aus den Navier-Stokes-Gleichungen her. Geben Sie alle zur Lösung der Differentialgleichung notwendigen Randbedingungen sowie die getroffenen Vereinfachungen begründet an.

<u>Hinweise zur Vorgehensweise:</u> Lösen Sie zuerst die Indexnotation der Navier-Stokes-Gleichungen jeweils für die x- und die y-Richtung sowie der Kontinuitätsgleichung auf. Benutzen Sie danach alle notwendigen Randbedingungen sowie Vereinfachungen und vereinfachen Sie entsprechend die Navier-Stokes-Gleichungen.

<u>Gleichungen: stationär und für inkompressible Strömung:</u>

Navier-Stokes: $\rho \cdot c_i \cdot \frac{\partial c_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \eta \cdot \frac{\partial^2 c_j}{\partial x_i^2} + f_j$

Kontinuität: $\frac{\partial c_i}{\partial x_i} = 0$

Musterlösungen der Klausur

Strömungsmechanik I - Frühjahr 07

Kurzaufgaben

Kurzaufgabe 1a.)

$$\frac{p_0}{p_{stat}} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$, da kompressibel

$$Ma = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{p_0}{p_{pstat}}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]}$$

$$Ma = \sqrt{\frac{2}{1{,}4 - 1} \cdot \left[\left(\frac{1{,}5 bar}{1 bar}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} - 1\right]}$$

$$Ma = 0{,}78$$

$$\frac{T_0}{T_{stat}} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2$$

$$T_{stat} = \frac{T_0}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

$$T_{stat} = \frac{300K}{1 + \frac{1{,}4 - 1}{2} \cdot 0{,}78^2}$$

$$T_{stat} = 267{,}45K$$

$$c = Ma \cdot a = 0{,}78 * \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_{stat}}$$

$$c = Ma \cdot a = 0{,}78 * \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 267{,}45K} = 255{,}69 \frac{m}{s}$$

$$\dot{V} = \underbrace{\left[\pi \cdot \left(\frac{D^2}{4}\right) - D \cdot d\right]}_{A} \cdot c$$, Fläche des Sondenschaftes muss abgezogen werden

$$\dot{V} = \left[\pi \cdot \left(\frac{0{,}3m^2}{4}\right) - 0{,}3m \cdot 0{,}01m\right] \cdot 255{,}69 \frac{m}{s}$$

$$V = 17{,}31 \frac{m^3}{s}$$

Kurzaufgabe 1b.)

1.)

$$\dot{V} = A \cdot c$$

$$c = \frac{\dot{V}}{A} = 10.000 \cdot 10^{-3} \frac{\frac{m^3}{s}}{\frac{\pi}{4} \cdot (1{,}2m)^2}$$

$$c = 8{,}84 \frac{m}{s}$$

2.)

$$p_{tot} = p_{stat} + \frac{\rho}{2} \cdot c^2$$

$$p_{tot} = 6 \cdot 10^5 \,Pa + \frac{1000 \frac{kg}{m^3}}{2} \cdot \left(8{,}84 \frac{m}{s}\right)^2, \text{ c aus 1.)}$$

$$p_{tot} = 639073 Pa$$

$$p_{tot} = p_{stat} + \frac{\rho}{2} \cdot c^2_{Düse}$$

$$c_{Düse} = \sqrt{2 \cdot \frac{p_{tot} - p_{stat,Düse}}{\rho}}$$

$$c_{Düse} = \sqrt{2 \cdot \frac{639073 Pa - 10^5 \,Pa}{1000 \frac{kg}{m^3}}} = 32{,}84 \frac{m}{s}$$

$$A_{Düse} = \frac{V}{c_{Düse}} = \frac{10 \frac{m^3}{s}}{32{,}84 \frac{m}{2}} = 0{,}3 m^2$$

$$D_{Düse} = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{Düse}}{\pi}} = 0{,}62 m$$

3.)

$$c = 0 \;\; => \;\; p_{Belastung} = ptot = 639073 Pa$$

Kurzaufgabe 1c.)

$\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (p_i - p_a) = \sigma \cdot \pi \cdot D$ Kräftegleichgewicht an der Halbkugel

$$\sigma = \frac{D \cdot (p_i - p_a)}{4}$$

$p_a = \rho_W \cdot g \cdot H + p_u$ Außendruck durch Wassersäule

$p_i = \rho_A \cdot g \cdot \Delta h + p_0$ Innendruck des Versuchsgases

$$\sigma = \frac{D \cdot (\rho_A \cdot g \cdot \Delta h + p_0 - \rho_W \cdot g \cdot H - p_u)}{4}$$

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 2.)

2.1)

Bernoulli von 0 nach 3

$$\frac{c_0^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+g\cdot h_0+\frac{P_{03}}{\rho\cdot\dot{V}}=\frac{c_3^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+g\cdot(h_3+h_4)$$

mit c_0=0 und h_0=0

$$P_{03}=\rho\cdot\dot{V}\cdot\left(\frac{c_3^2}{2}+g\cdot(h_3+h_4)\right)$$

$\dot{m}=A\cdot c\cdot\rho=\text{const}$, Dichte kann gekürzt werden, da inkompressibel

$$c_3=\frac{\dot{V}}{A_3}$$

$$c_3=\frac{V_{\text{Badetrog}}}{t_{\text{Badetrog}}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot d_D^2}$$

in Bernoulli einsetzen

$$P_{03}=\rho\cdot\frac{V_{\text{Badetrog}}}{t_{\text{Badetrog}}}\cdot\left(\frac{c_3^2}{2}+g\cdot(h_3+h_4)\right)$$

$$P_{\text{Pumpe},0.2}=\frac{P_{03}}{\eta_{\text{Pumpe},0.2}}$$

2.2)

Bernoulli von 1* nach 3, 1* befindet sich bei $(R+h_2/2)$

$$\frac{c_{1*}^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+g\cdot(R+\frac{h_2}{2})+\frac{P_{13}}{\rho\cdot\dot{V}}=\frac{c_3^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+g\cdot(h_3+h_4)+\frac{\Delta p_{V,13}}{\rho}$$

mit c_1=0

$$P_{13}=\rho\cdot\dot{V}\cdot\left(\frac{c_3^2}{2}+g\cdot(h_3+h_4)+\frac{\Delta p_{V,13}}{\rho}-g\cdot(R+\frac{h_2}{2})\right)$$

$$\dot{m}=A\cdot c\cdot\rho=\text{const}$$

$$c_3=\frac{\dot{m}}{\rho\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(d_D)^2}$$

$$c_3 = \frac{2\frac{kg}{s}}{1000\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(0{,}1m)^2} = 0{,}25\frac{m}{s}$$

analog für c_2

$$c_2 = \frac{2\frac{kg}{s}}{1000\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(0{,}05m)^2} = 1{,}02\frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{c_2 \cdot d_2}{\upsilon}$$

$$Re = \frac{1{,}02\frac{m}{s}\cdot 0{,}05m}{10^{-6}\frac{m^2}{s}} 5{,}1\cdot 10^4$$

$$\frac{k_s}{d_2} = \frac{2\cdot 10^{-3}m}{0{,}05m} = 4\cdot 10^{-2}$$

Moody => $\lambda = 0{,}065$

$$\Delta p_{V,1,3} = \lambda\cdot\frac{(h_3 + l_2)}{d_2}\cdot\frac{\rho}{2}\cdot c_2^2$$

$$\Delta p_{V1,3} = 0{,}065\cdot\frac{2m}{0{,}05m}\cdot\frac{1000\frac{kg}{m^3}}{2}\cdot\left(1{,}02\frac{m}{s}\right)^2 = 1352{,}5Pa$$

$$P_{13} = 2\frac{kg}{s}\cdot\left(\frac{\left(0{,}25\frac{m}{s}\right)^2}{2} + 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 3m + \frac{1352{,}5Pa}{1000\frac{kg}{m^3}} - 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}25m\right)$$

$$P_{13} = 37{,}1W$$

2.3)

Ausströmgeschwindigkeit:

Bernoulli von 1 nach 2

$$\frac{c_1^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gh(t) = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gh(t_E)$$

mit t_E = Entleerungszeit

c_1=0, da R>>d_1

$h(t_E)=0$

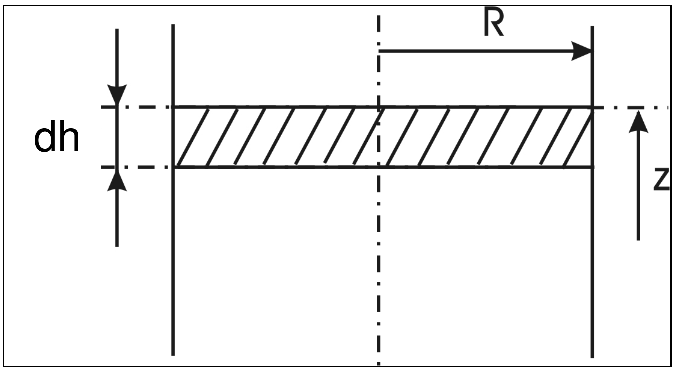
=> $h(t) \cdot g \cdot 2 = c_2^2$

$c_2 = \sqrt{2gh(t)}$ ist die Ausströmgeschwindigkeit

Entleerungszeit:

$t_{ges} = t_{Zyl} + t_{Kugel}$

1. t_{Zyl}



$$dm = dh \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \rho = \rho \cdot c_2 \cdot \frac{d_1^2}{4} \cdot \pi \cdot dt$$

$$dh \cdot 4 \cdot \frac{R^2}{d_1^2} \cdot \frac{1}{c_2} = dt$$

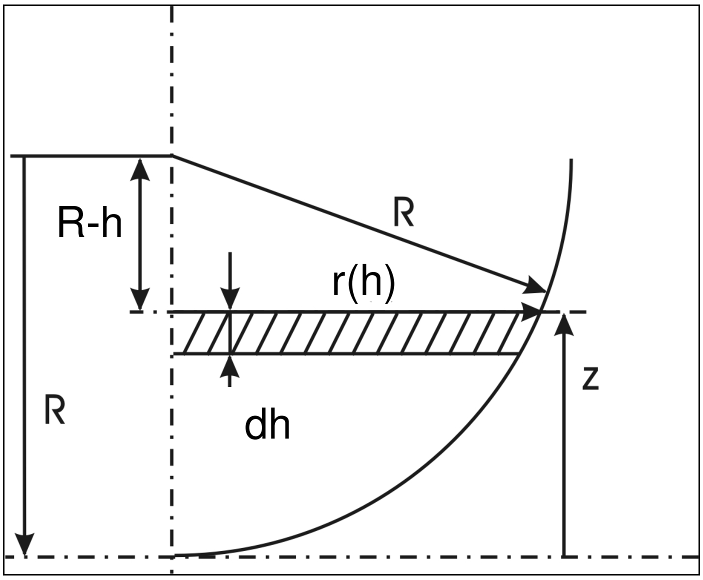
$$t_{Zyl} = \frac{4R^2}{d_1^2} \int_{R+h_2}^{R} \frac{1}{c_2} dh$$

$$t_{Zyl} = -\frac{4R^2}{d_1^2} \int_{R+h_2}^{R} \frac{1}{\sqrt{2gh(t)}} dh$$

$$t_{Zyl} = \frac{4R^2}{d_1^2 \cdot \sqrt{2g}} \left[2\sqrt{h}\right]_{R+h_2}^{R}$$

$$\underline{t_{Zyl} = \frac{4R^2}{d_1^2 \cdot \sqrt{2g}} \left[2\sqrt{R+h_2} - 2\sqrt{R}\right]}$$

2. t_{Kugel}



Pythagoras:

$$r^2(h) + (R-h)^2 = R^2$$

$$r^2(h) = 2Rh - h^2$$

$$dm = dh \cdot r^2(h) \cdot \pi \cdot \rho = \rho \cdot c_2 \cdot \frac{d_1^2}{4} \cdot \pi \cdot dt$$

$$\int_R^0 \frac{r^2(h)}{\sqrt{2gh(t)}} \frac{4}{d_1^2} dh = \int_0^{t_{Kugel}} dt$$

$$\int_R^0 \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{4}{d_1^2} \frac{2Rh - h^2}{\sqrt{h}} dh = t_{Kugel}$$

$$\int_R^0 \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{4}{d_1^2} \left(2R\sqrt{h} - h^{\frac{3}{2}} \right) dh = t_{Kugel}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2g} \cdot d_1^2} \left[2R \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} \right]_R^0 = t_{Kugel}$$

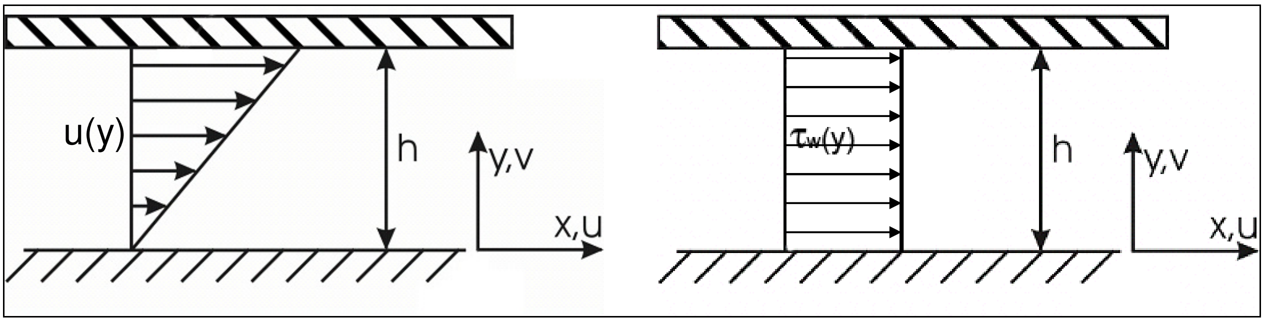
$$\frac{4}{\sqrt{2g} \cdot d_1^2} \cdot \left(2R \frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} R^{\frac{5}{2}} \right) = t_{Kugel}$$

$$t_{Kugel} = \frac{4}{\sqrt{2g} \cdot d_1^2} \cdot \left(\frac{14}{15} R^{\frac{5}{2}} \right)$$

Aufgabe 3.)

3.1) Name und Geschwindigkeitsprofil

Die sich einstellende Strömung heißt Couette-Strömung.



3.2) Reibleistung

$$\tau = \eta \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nu \cdot \rho \cdot \left(\frac{\omega \cdot R}{h} \right)$$

$$F = \tau \cdot A = \nu \cdot \rho \cdot \frac{\omega \cdot R}{h} \cdot B \cdot L$$

$$M = F \cdot R$$

$$M = \nu \cdot \rho \cdot \frac{\omega \cdot R^2}{h} \cdot B \cdot L$$

$$P = M \cdot \omega$$

$$P = \nu \cdot \rho \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^2}{h} \cdot B \cdot L$$

$$P = 0{,}135 \frac{m^2}{s} \cdot 850 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{(0{,}5 Hz)^2 \cdot (0{,}2 m)^2}{0{,}01 m} \cdot 1 m \cdot 3 m$$

$$P = 344{,}25 W$$

3.3) Herleitung des Geschwindigkeitsprofils u(y)

x-Richtung: $\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$

y-Richtung: $\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho \cdot g$

Vereinfachungen:

1.) 2D-Strömung: $w = 0$ und $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

2.) Einlaufeffekte sind zu vernachlässigen => $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ und v=0

3.) Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} =$ => $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ wegen 2.

Daraus ergeben sich folgende Vereinfachungen:

x-Richtung: $\rho \cdot \left(u \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{0} + \underbrace{v}_{0} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}}_{0} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{0} \right)$

y-Richtung: $\rho \cdot \left(u \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{0} + v \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{0} + \underbrace{w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}}_{0} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{0} \right) + \rho \cdot g$

DGL:

x-Richtung: $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$

y-Richtung: $0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot g$ (Hydrostatik liefert keine zusätzlichen Informationen)

RANDBEDINGUNGEN:

Da für die x-Richtung eine DGl 2ter Ordnung vorliegt, sind 2 Randbedingungen notwendig.

1.) $u(y = 0) = 0$

2.) $u(y = h) = \omega \cdot R$