Leibniz Universität Hannover
Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik
Prof. Dr.-Ing. J. Seume

Klausur Frühjahr 2008

„Strömungsmechanik I“

Bearbeitungsdauer: 90 min

zugelassene Hilfsmittel:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- TFD-Formelsammlung (ohne handschriftliche Ergänzungen)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht, => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- mitgebrachtes Papier

weitere Hinweise: Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.
Beschriften Sie jedes Blatt mit Name und Matrikelnr.

Name	Vorname	Matr. Nummer

	mögliche Punktezahl	erreichte Punktezahl
Aufgabe 1	21	
Aufgabe 2	18	
Aufgabe 3	21	
Gesamt	60	
	Note	

!!Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar!!

Viel Erfolg!

Kurzaufgabe 1a.) 2 Punkte

Ein Würfel aus Eis mit den Kantenlängen L schwimmt nach Abbildung 1 in einem Behälter, der mit Wasser gefüllt ist. Berechnen Sie die Höhe H des eingetauchten Volumens des Eiswürfels.

Geg.: L, ρ_{Eis}, ρ_{Wasser}

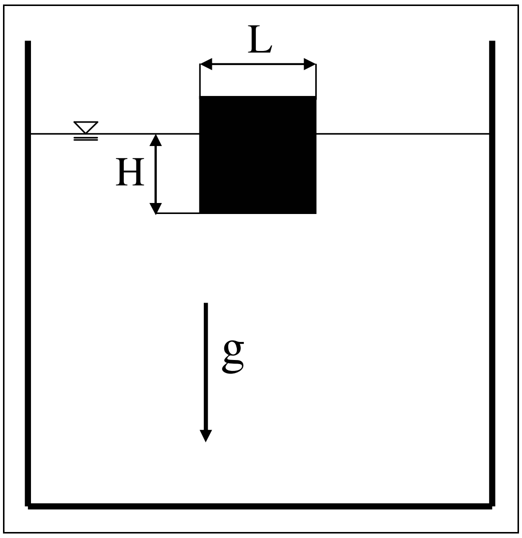


Abbildung 1

Kurzaufgabe 1b.) 9 Punkte

Skizzieren Sie den Stromlinienverlauf in Abbildung 2 um eine unendlich dünne quer angeströmte Platte und um einen quer angeströmten Zylinder für die Fälle, dass

I. ein ideales (reibungsfreies) Fluid,

II. ein reales (reibungsbehaftetes) Fluid

betrachtet wird. Für Fall II ist die Grenzschicht vollturbulent.

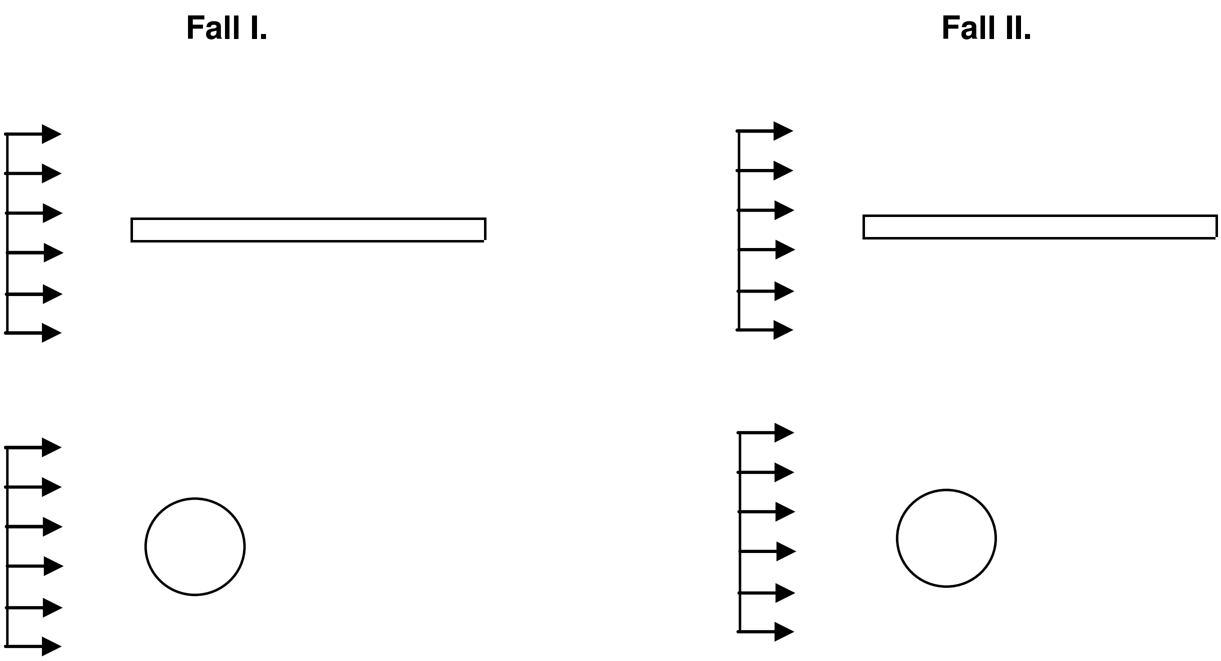
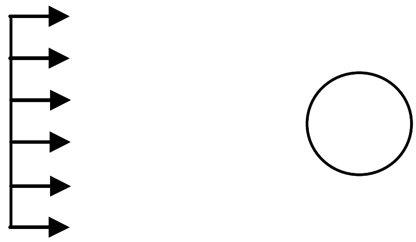


Abbildung 2

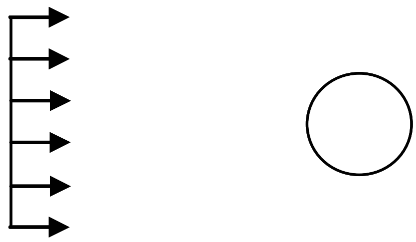
Betrachtet wird nun die reibungsbehaftete Umströmung des Zylinders nach Fall II. Wie verändert sich die Strömung in der Nähe der Oberfläche und im Nachlauf des Zylinders, wenn die Geschwindigkeit der Außenströmung von $Re=10^{-2}$ bis $Re=10^{6}$ erhöht wird? Zeichnen Sie dazu fünf Stromlinienbilder für $Re=10^{-2}$, 20, 10^{2},10^{4} und 10^{6} in die vorgebenden Skizzen (siehe nächste Seite) ein.

Hinweis: Die kritische Reynolds-Zahl für den lam.-turb. Umschlag beträgt $2\cdot10^{5}$.

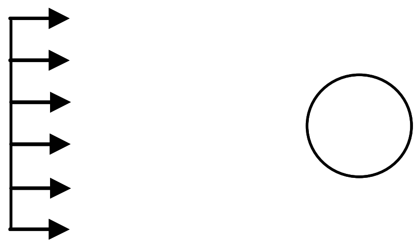
$Re=10^{-2}$



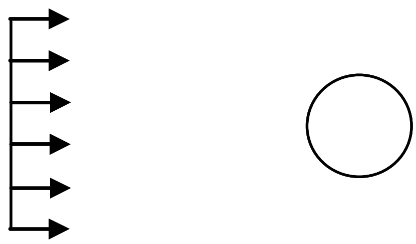
$Re=20$



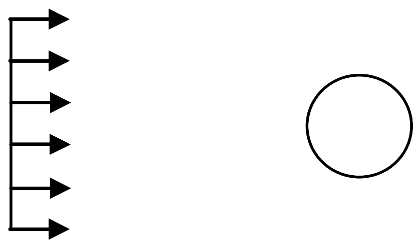
$Re=10^{2}$



$Re=10^{4}$



$Re=10^{6}$

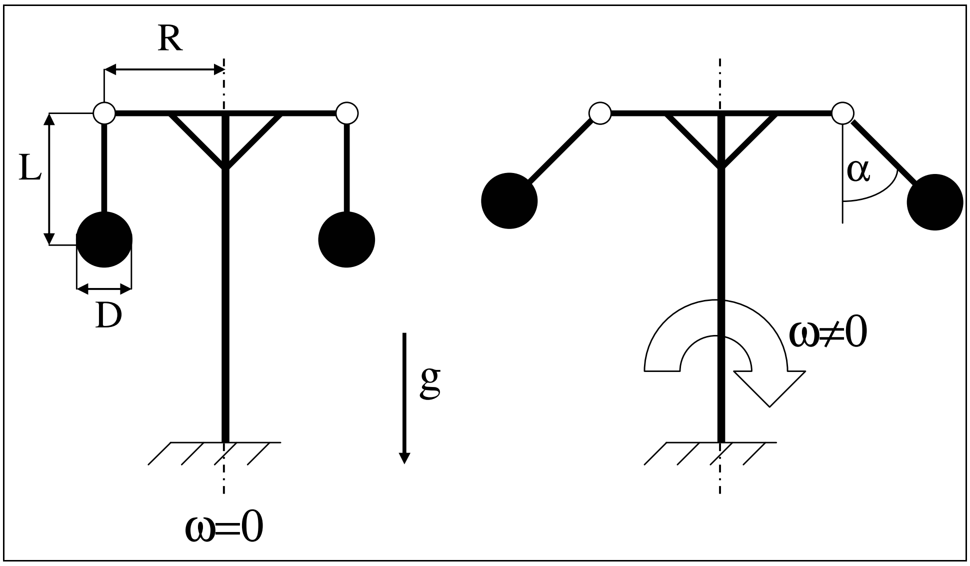


Kurzaufgabe 1c.) 10 Punkte

2 Kugeln mit dem Durchmesser D sind wie in Abbildung 2 gezeigt drehbar gelagert. Ohne Rotation beträgt die radiale Auslenkung R und die vertikale Auslenkung L. Die Ständerwelle dreht nun mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so dass die Kugeln um den Winkel α ausgelenkt (siehe Abbildung 2, rechts) werden. Berechnen Sie das durch den Luftwiderstand der Kugeln erzeugte Reibmoment auf die Ständerwelle.

Hinweis: Abbildung 2 zeigt ebenfalls den Widerstandbeiwert einer Kugel in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl. Das Strömungsfeld um die Kugeln entspricht dem einer Kugel für eine freie Anströmung.

Geg.: ρ_{Luft}=1.2kg/m³, D=1cm, R=1m, L=1m, g=9.81m/s², α=45°, ν_{Luft}=10^{-6}m²/s



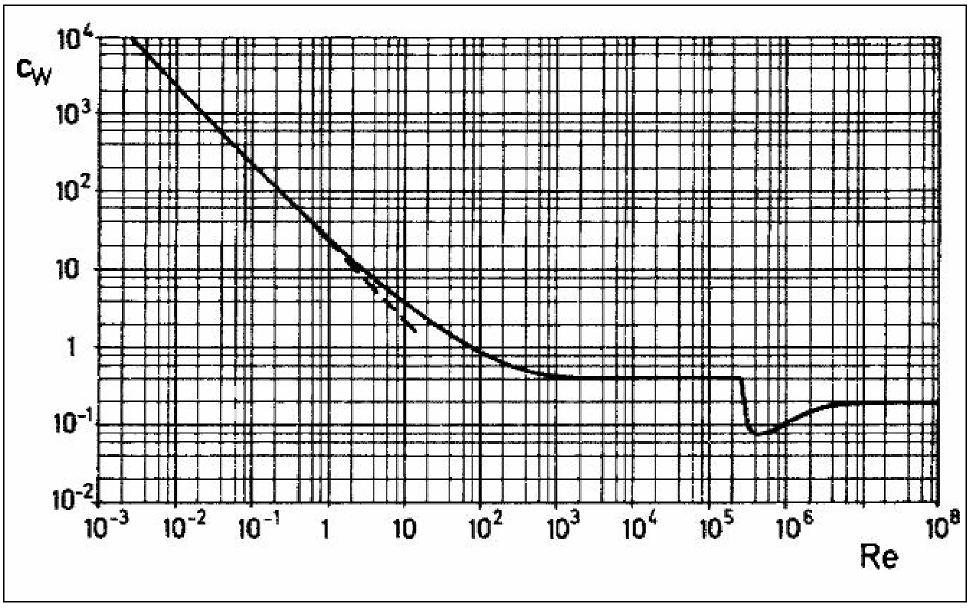


Abbildung 2

Aufgabe 2.) 18 Punkte

Eine Pumpspeicherwerk nach Abbildung 3 wird sowohl im Pump- als auch im Turbinenbetrieb betrieben. Im Pumpbetrieb fördert eine Pumpe Wasser (inkompressibel) vom unteren Speicherbecken in das obere Speicherbecken. Im Turbinenbetrieb muss der Füllstand des oberen Beckens oberhalb der in Abbildung 3 angebeben Höhe H_1 liegen, so dass die Turbine angetrieben werden kann. Alle Becken seien unendlich groß.

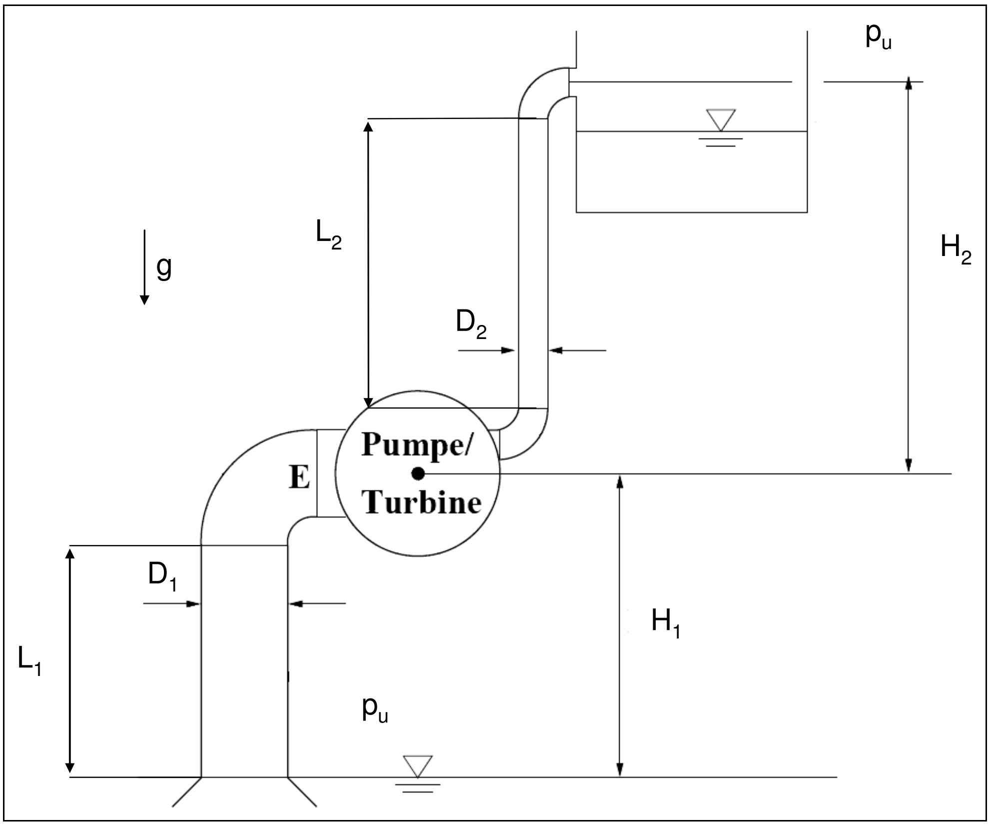


Abbildung 3

2.1) Pumpenleistung (4 Punkte)

Die Strömung sei reibungsfrei. Berechnen Sie die erforderliche elektrische Pumpenleistung im Speicherbetrieb, wenn der Pumpenwirkungsgrad η vorliegt. Der Massenstrom beträgt $\dot{m}$.

Geg.: $\rho=1000\text{kg/m}^3$; $D_1=1\text{m}$; $D_2=0.3\text{m}$; $g=9.81\text{m/s}^2$; $\eta=0.8$; $H_1=10\text{m}$; $H_2=100\text{m}$; $\dot{m}=250\text{kg/s}$

2.2) Druck vor der Pumpe (4 Punkte)

Die Strömung sei reibungsfrei. Wie groß muss der Massenstrom gewählt werden, damit der Druckunterschied zwischen Umgebungsdruck und dem Druck am Pumpeneintritt E im Speicherbetrieb 50% des absoluten Umgebungsdruckes beträgt?

Geg.: ρ=1000kg/m³; D_1=0.5m; g=9.81m/s²; p_u=1bar; H_1=5m

2.3) Turbinenleistung (10 Punkte)

Das Pumpspeicherwerk arbeitet nun im Turbinenbetrieb nach Abbildung 4. Die Strömung sei reibungsbehaftet. Auf der Rohrstrecke mit der Länge L_1 liegt die Sandkornrauhigkeit $k_{s,1}$ und auf der Rohrstrecke mit der Länge L_2 die Sandkornrauhigkeit $k_{s,2}$ vor. In der Rohrleitung 1 wird durch eine Prandtlsonde ein dynamischer Druck von 125Pa bestimmt. Berechnen Sie die mechanische Turbinenleistung, die erzeugt werden kann.

Geg.: ρ=1000kg/m³; D_1=1m; D_2=0.4m; g=9.81m/s²; H_1=10m; H_2=94m; L_1=6m L_2=60m; $k_{s,1}$=0.4mm; $k_{s,2}$=0.8mm; $p_{dyn,1}$=125Pa; $\nu=10^{-6}$m²/s

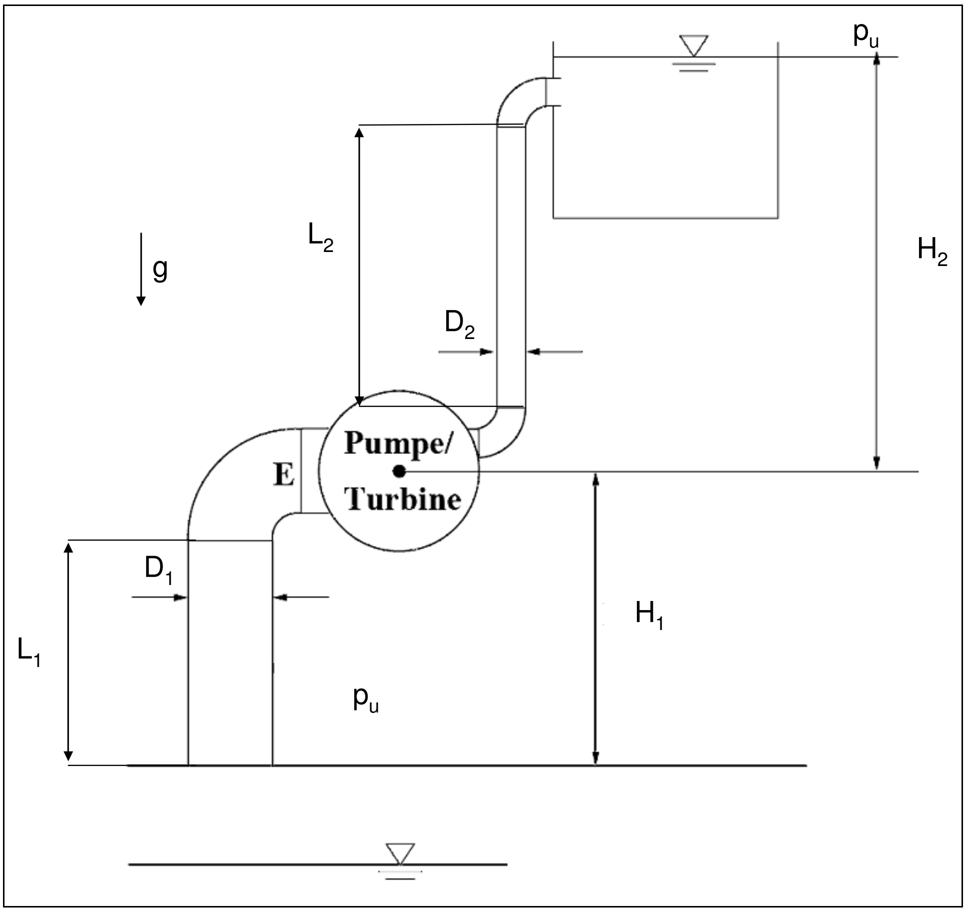


Abbildung 4

Aufgabe 3.) 21 Punkte

Über dem Feuer auf der rechten Seite nach Abbildung 5, wird eine Dampfkugel nach Heron betrieben. (Wasser verdampft im Kessel und gelangt über ein Rohr in die hohle Kugel). Die Kugel ist drehbar gelagert. Mittels einer Bremse kann die Kugel festgehalten und damit an der Rotation gehindert werden. Der Dampf kann vereinfacht als ideales und isentropes Gas angesehen werden. Das Gas steht im Kessel bei einem konstanten Druck von p_0 und einer Temperatur T_0. An der Kugel sind zwei tangentiale Öffnungen vorhanden, die als kreisrunde konvergente Düsen (Index 1) mit dem minimalen Austrittsquerschnitt A_{min} ausgeführt sind, wodurch das Gas in die Umgebung expandiert. Der mittlere Radius der konvergenten Düsen von der Drehachse beträgt r. Die Strömung ist **kompressibel**.

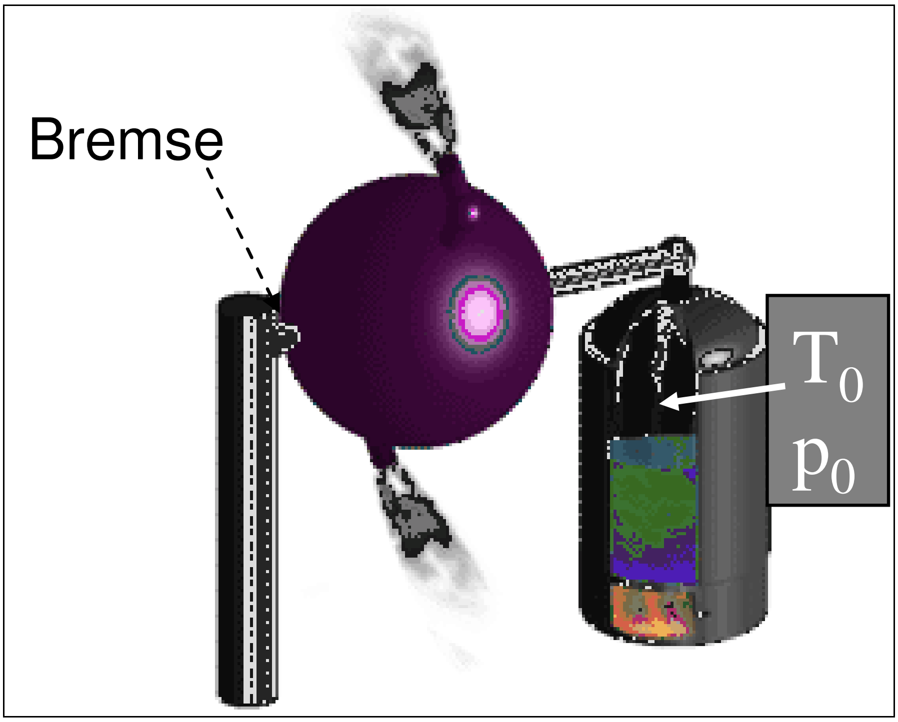


Abbildung 5

3.1) Massenstrom und Bremsmoment (9 Punkte)

Die Bremse verhindert die Rotation und am minimalen Querschnitt der konvergenten Düse wird eine Prandtl-Sonde zur Messung der Austrittsbedingungen nach Abbildung 6 eingebaut. Als Messflüssigkeit in den U-Rohren wird Wasser verwendet. Eine Beeinflussung der Strömung am Austritt der Düse durch die Prandtl-Sonde kann vernachlässigt werden.

Berechnen Sie die Mach-Zahl, die statische Temperatur und die Geschwindigkeit am Austritt aus der konvergenten Düse.

Berechnen Sie den gesamten austretenden Massenstrom und anschließend das Bremsmoment auf die Bremse.

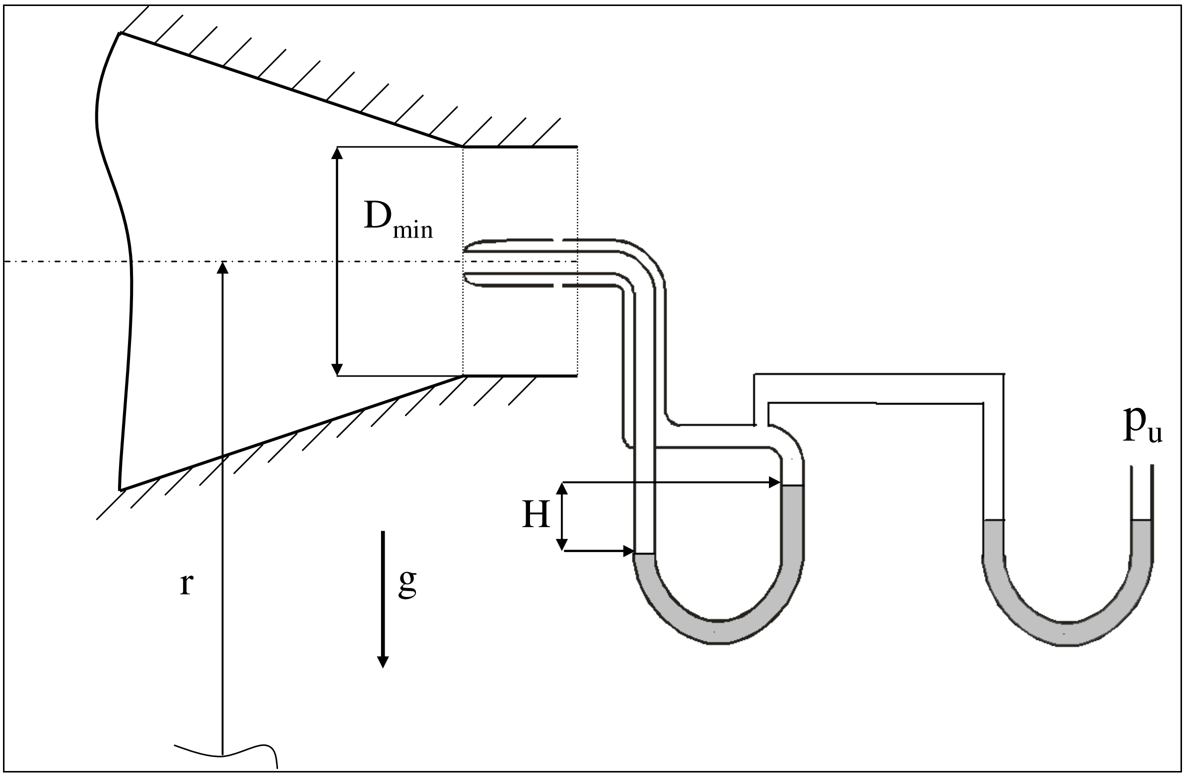


Abbildung 6

Geg.: κ=1.3; T_0=500K; p_u=1bar; D_{min}=2cm; H=5.1m; r=0.5m; R=462J/(kg·K); ρ_{Wasser}=1000kg/m³; g=9.81m/s²

3.2) Leistung (8 Punkte)

Die Bremse wird gelöst und die Kugel rotiert mit der konstanten Drehzahl n. Über einen Abtrieb an der Welle wird eine Leistung P abgenommen. Berechnen Sie die am Abtrieb abgegebene Leistung P.

Geg.: κ=1.3; T_0=600K; p_0=3bar; p_u=1bar; R=462J/(kg·K); A_{min}=90cm²; n=1000U/min; r=0.5m

3.3) Grenzfall (4 Punkte)

Die Kugel rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Absolutgeschwindigkeit ist allerdings für diesen theoretischen Grenzfall identisch null. Zeichnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren (Absolut-, Relativ- und Umfangsgeschwindigkeit) am Austritt der konvergenten Düse und zeigen Sie anhand einer geeigneten Gleichung für die Geschwindigkeiten begründet, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit die Absolutgeschwindigkeit identisch null ist. Berechnen Sie den gesamten austretenden Massenstrom $\dot{m}$.

Geg.: ω, r, ρ_1, A_{min}

Musterlösungen der Klausur

Strömungsmechanik I - Frühjahr 08

Kurzaufgaben

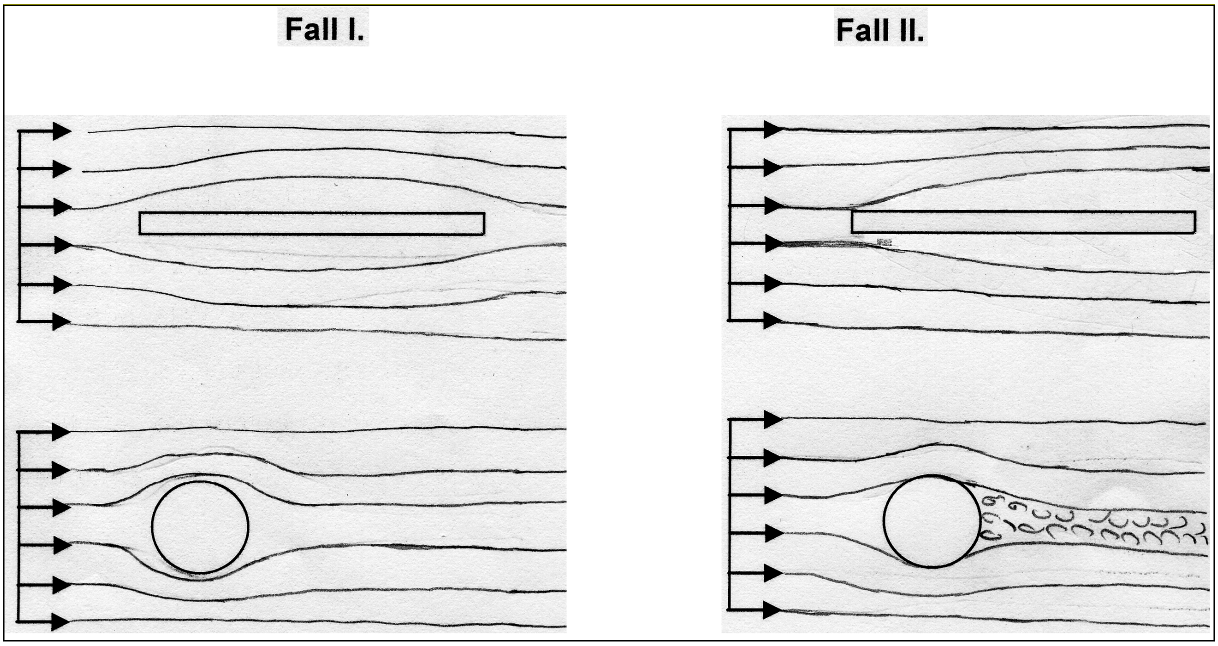
Kurzaufgabe 1a.)

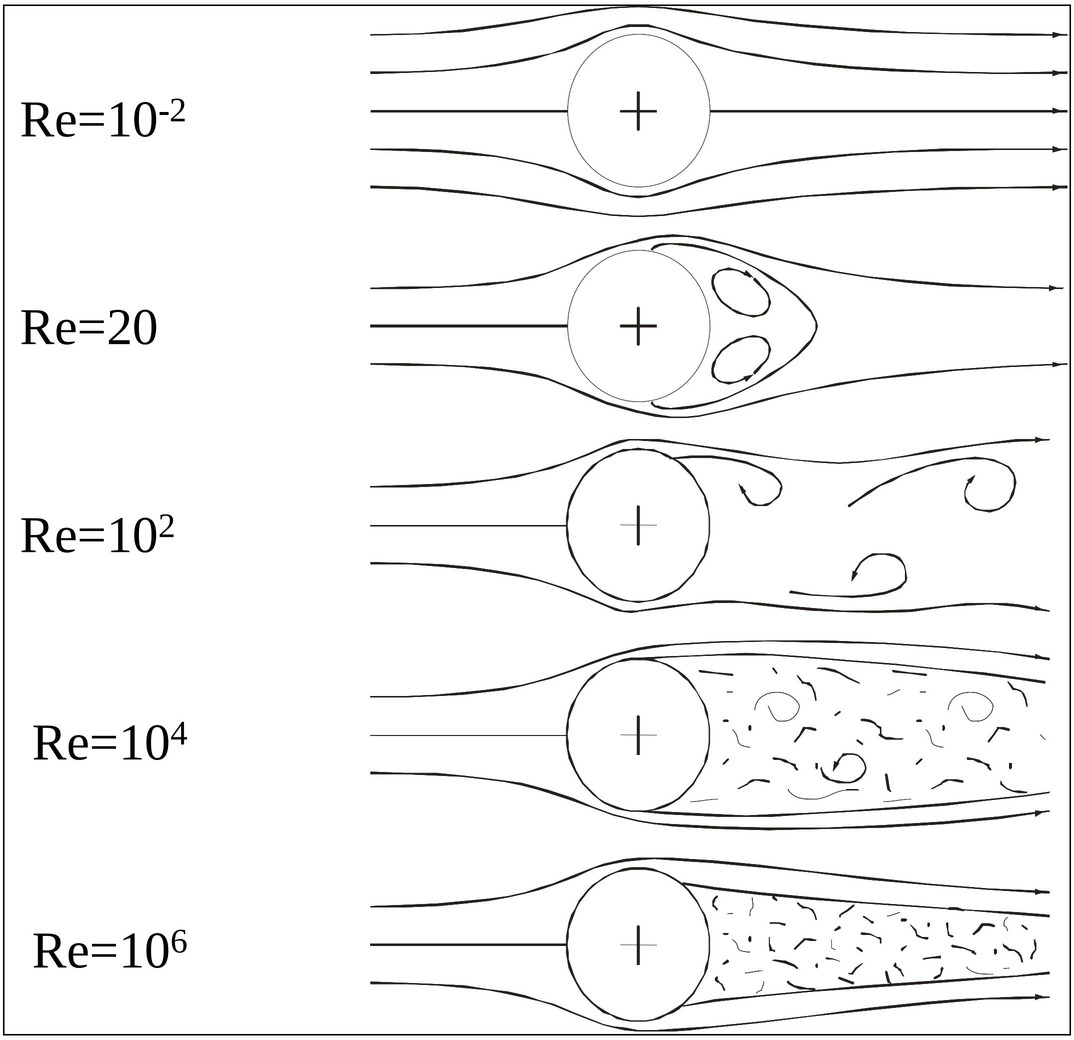
$F_A = F_G$

$\rho_E \cdot g \cdot L^3 = \rho_W \cdot g \cdot L^2 \cdot H$

$\frac{\rho_E}{\rho_W} \cdot L = H$

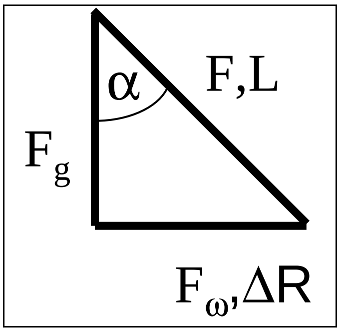
Kurzaufgabe 1b.)





Kurzaufgabe 1c.)

Bestimmen von ω



$$\sin(\alpha) = \frac{\Delta R}{L}$$

$$\Delta R = \sin(\alpha) \cdot L = \sin(45°) \cdot 1m = 0.71m$$

$\tan(\alpha) = \dfrac{F_\omega}{F_G}$ mit $F_\omega = m \cdot \omega^2 \cdot (R + \Delta R)$ und $F_G = m \cdot g$

$$F_\omega = \tan(\alpha) \cdot F_G$$

$$\omega^2 \cdot (R + \Delta R) = \tan(\alpha) \cdot g$$

$$\omega^2 = \frac{\tan(\alpha) \cdot g}{(R + \Delta R)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\tan(45°) \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}}{(1m + 0.71m)}} = 2.40 \frac{1}{s}$$

$$c_{Kugel} = \omega \cdot (R + \Delta R) = 2.40 \frac{1}{s} \cdot 1.71m = 4.10 \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{c_{Kugel} \cdot D}{\nu} = \frac{4.1 \frac{m}{s} \cdot 0.01m}{10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 4.1 \cdot 10^4$$

Das Diagramm liefert damit einen Widerstandsbeiwert von c_W=0.4.

$$c_W = \frac{F_W}{\frac{\rho}{2} \cdot c_{Kugel}^2 \cdot A}$$

$$M = 2 \cdot F_W \cdot (R + \Delta R)$$

$$M = 2 \cdot c_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_{Kugel}^2 \cdot A \cdot (R + \Delta R)$$

$$M = \rho \cdot c_W \cdot c_{Kugel}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (R + \Delta R)$$

$$M = 1.2 \frac{kg}{m^3} \cdot 0.4 \cdot \left(4.1 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0.01m)^2 \cdot (1m + 0.71m) = 1.08 \cdot 10^{-3}\, Nm$$

Aufgabe 2.)

2.1)

$$\frac{c_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+\frac{P_{12}}{\dot{m}}=\frac{c_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+g\cdot(H_1+H_2)$$ mit c_1=0 und p_2=p_1

$$P_{12}=\dot{m}\left(\frac{c_2^2}{2}+g\cdot(H_1+H_2)\right)$$

$$c_2=\frac{\dot{m}}{\rho\cdot A_2}=\frac{250\,\frac{kg}{s}}{1000\,\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(0.3m)^2}=3.54\,\frac{m}{s}$$

$$P_{12}=250\,\frac{kg}{s}\cdot\left(\frac{\left(3.54\,\frac{m}{s}\right)^2}{2}+9.81\frac{m}{s^2}\cdot(110m)\right)$$

$$P_{12}=271{,}34\cdot10^3\,W$$

$$P_{12,\text{elektrisch}}=\frac{271{,}34\cdot10^3\,W}{0.8}=339{,}18\cdot10^3\,W$$

2.2)

$$\frac{c_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+g\cdot0=\frac{c_E^2}{2}+\frac{p_E}{\rho}+g\cdot H_1$$ mit c_1=0 und p1=p_u

$$\frac{p_u-p_E}{\rho}=\frac{c_E^2}{2}+g\cdot H_1$$

$$\frac{c_E^2}{2}=\frac{p_u-p_E}{\rho}-g\cdot H_1$$

$$c_E=\sqrt{2\cdot\left(\frac{p_u-p_E}{\rho}-g\cdot H_1\right)}$$

$$c_E=\sqrt{2\cdot\left(\frac{0.5\cdot10^5\,Pa}{1000\,\frac{kg}{m^3}}-9.81\frac{m}{s^2}\cdot5m\right)}=1.38\,\frac{m}{s}$$

$$\dot{m}=\rho\cdot A_E\cdot c_E=1000\,\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(0.5m)^2\cdot1.38\,\frac{m}{s}=270{,}96\,\frac{kg}{s}$$

2.3)

$$p_{dyn} = \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot p_{dyn}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 125\text{Pa}}{1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = 0.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{m} = \rho \cdot A_1 \cdot c_1 = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (1\text{m})^2 \cdot 0.5\frac{\text{m}}{\text{s}} = 392{,}7\frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$c_2 = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A_2} = \frac{392.7\frac{\text{kg}}{\text{s}}}{1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0.4\text{m})^2} = 3.13\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Re_1 = \frac{c_1 \cdot d_1}{\nu} = \frac{0.5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\text{m}}{10^{-6}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 5 \cdot 10^5$$

$$Re_2 = \frac{c_2 \cdot d_2}{\nu} = \frac{3.13\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}4\text{m}}{10^{-6}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 1.3 \cdot 10^6$$

$$\frac{k_{s,1}}{d_1} = \frac{0.4 \cdot 10^{-3}\text{m}}{1\text{m}} = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{k_{s,2}}{d_2} = \frac{0.8 \cdot 10^{-3}\text{m}}{0{,}4\text{m}} = 2 \cdot 10^{-3}$$

Moody-Diagramm:

$$\lambda_1 = 0{,}017$$

$$\lambda_2 = 0{,}024$$

$$\Delta p_{v,1} = \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{\rho \cdot c_1^2}{2} = 0{,}017 \cdot \frac{6\text{m}}{1\text{m}} \cdot \frac{1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(0.5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 13\text{Pa}$$

$$\Delta p_{v,2} = \lambda 2_1 \cdot \frac{L_2}{d_2} \cdot \frac{\rho \cdot c_2^2}{2} = 0{,}024 \cdot \frac{60m}{0{,}4m} \cdot \frac{1000\frac{kg}{m^3} \cdot \left(3.13\frac{m}{s}\right)^2}{2} = 17634Pa$$

$$\frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot (H_1 + H_2) + \frac{P_{12}}{\dot{m}} = \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\Delta p_{v,ges}}{\rho}$$ mit $p_1=p_2$ und $c_2=0$

$$P_{12} = \dot{m}\left(\frac{c_1^2}{2} + \frac{\Delta p_{v,ges}}{\rho} - g \cdot (H_1 + H_2)\right)$$

$$P_{12} = 392.7\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\left(\frac{\left(0.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2} + \frac{(13+17634)\,\mathrm{Pa}}{1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} - 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(104\,\mathrm{m})\right)$$

$$P_{12} = -393.67\cdot 10^3\,\mathrm{W}$$

Aufgabe 3.)

3.1)

$$\frac{p_{tot}}{p_1} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$, da kompressibel!!

Aus U-Rohr rechts: $p_1 = p_u$

Aus U-Rohr links: $p_{tot} = p_u + \rho \cdot g \cdot H$

$$p_{tot} = 10^5 \,Pa + 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 5{,}1 m = 150031 Pa$$

$$Ma = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{p_{tot}}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]}$$

$$Ma = \sqrt{\frac{2}{1{,}3 - 1} \cdot \left[\left(\frac{1{,}50031 bar}{1 bar}\right)^{\frac{1{,}3-1}{1{,}3}} - 1\right]}$$

$$Ma = 0{,}81$$

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2$$

$$T_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

$$T_1 = \frac{500K}{1 + \frac{1{,}3 - 1}{2} \cdot 0{,}81^2}$$

$$T_1 = 455{,}20K$$

$$c = Ma \cdot a = Ma \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1}$$

$$c = Ma \cdot a = 0{,}81 \cdot \sqrt{1{,}3 \cdot 462 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 455{,}20K} = 423{,}52 \frac{m}{s}$$

$$\rho_1 = \frac{p}{R \cdot T_1} = \frac{10^5 \,Pa}{462 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 455{,}26K} = 0{,}48 \frac{kg}{m^3}$$

$\dot{m} = 2 \cdot \rho_1 \cdot A_{min} \cdot c_1 = 2 \cdot 0{,}48 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}02m)^2 \cdot 423{,}52 \frac{m}{s} = 0{,}13 \frac{kg}{s}$, (Faktor 2 da 2 Düsen)

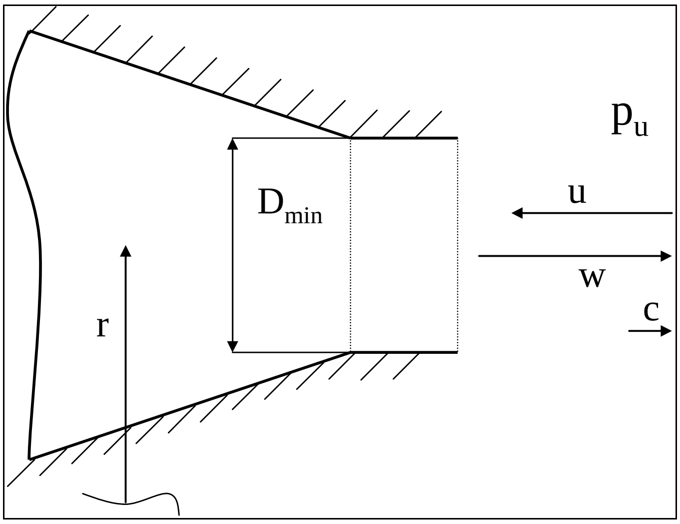
Bremsmoment auf die Welle

$$M = 2 \cdot r \cdot F_{Impuls}$$

$$M = 2 \cdot r \cdot c \cdot \frac{\dot{m}}{2}$$

$$M = 0{,}5\,m \cdot 423{,}52\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}13\,\frac{kg}{s} = 27{,}53\,Nm$$

3.2)



$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u}$, da 1D können die Vektorpfeile weggelassen werden

u-Richtung entgegen w und c, daher u mit negativem Vorzeichen versehen

$$\Pi_{real} = \frac{1}{3} < \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0.55$$ daher überkritische Strömung => $w_1 = a_1$

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{\kappa+1}{2}$$

$$T_1 = \frac{T_0}{\frac{\kappa+1}{2}} = \frac{600K}{\frac{1.3+1}{2}} = 521.74K$$

$$w_1 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1} = \sqrt{1.3 \cdot 462\,\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 521.74K} = 559.78\,\frac{m}{s}$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$p^* = \frac{p_0}{\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \frac{3 \cdot 10^5}{\left(\frac{1.3+1}{2}\right)^{\frac{1.3}{1.3-1}}} = 163718\,Pa$$

$$\rho_1 = \frac{p}{R \cdot T_1} = \frac{163718\,\mathrm{Pa}}{462\,\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 521{,}74\,K} = 0.68\,\frac{kg}{m^3}$$

Konti muss im Relativsystem angewendet werden

$$\dot{m} = 2 \cdot \rho_1 \cdot A_{min} \cdot w_1 = 2 \cdot 0{,}68\,\frac{kg}{m^3} \cdot 90 \cdot (0.01m)^2 \cdot 559.78\,\frac{m}{s}$$

$$\dot{m} = 6.85\,\frac{kg}{s}$$

$$M = 2 \cdot \frac{\dot{m}}{2} \cdot w_1 \cdot r = \dot{m} \cdot w_1 \cdot r$$

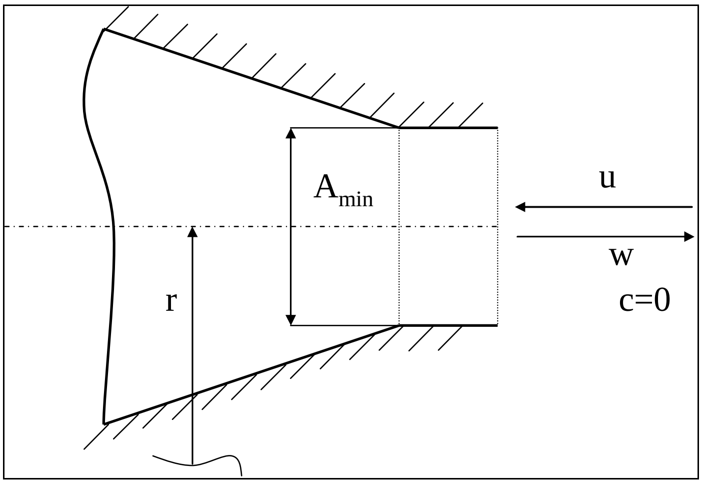
$$M = 6.85\,\frac{kg}{s} \cdot 559.78\,\frac{m}{s} \cdot 0.5m = 1917.25\,Nm$$

$$P = M \cdot \omega$$

$$P = 1917.25\,Nm \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1000}{60} \cdot \frac{1}{s}$$

$$P = 200774\,W \Rightarrow 200.77\,kW$$

3.3)



$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u}$, da 1D können die Vektorpfeile weggelassen werden

u-Richtung entgegen w; daher u mit negativem Vorzeichen versehen

$c_1=w_1-u$, da die Absolutgeschwindigkeit c_1 identisch null ist, gilt:

=> $w_1=u$

Konti muss im Relativsystem angewendet werden

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot 2 \cdot A_{min} \cdot w_1$$

$$\frac{\dot{m}}{\rho_1 \cdot 2 \cdot A_{min}} = \omega \cdot r$$

$$\dot{m} = \omega \cdot r \cdot \rho_1 \cdot 2 \cdot A_{min}$$