

Klausur

Strömungsmechanik 1

Frühling 2014

5. März 2014, Beginn 16:30 Uhr

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht, ⇒ keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- Mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

Weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Für Ergebnisse in Symbolschreibweise dürfen die gegebenen Parameter und die in vorherigen Teilaufgaben bestimmten Parameter benutzt werden.

Aufgabe	Punkte
1. Verständnisfragen	15
2. Kurzrechnungen	16
3. Inkompressible Strömung	22
Gesamt	53

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

**Jun.-Prof. K. Mulleners
B. Drechsel, C. Hamann**

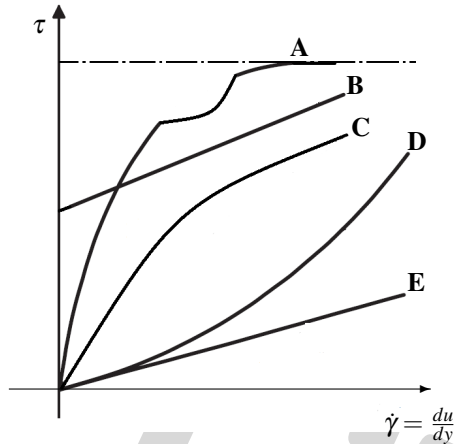
1. Verständnisfragen (15 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.
(Nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet.)

Viskosität von Flüssigkeiten

(1)

Ordnen Sie die Flüssigkeiten den gezeigten Viskositätsverläufen zu



- D Scherdickende Flüssigkeit
- E Newtonsche Flüssigkeit
- C Scherdünnende Flüssigkeit
- B Bingham Flüssigkeit

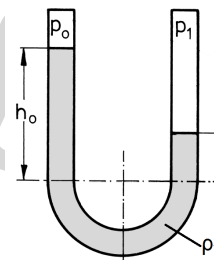
Höhendifferenz U-Rohr-Manometer

(2)

Berechnen Sie die Höhendifferenz $h_0 - h_1$, die sich im gezeigten U-Rohr-Manometer einstellt, wenn auf den beiden Schenkeln die Drücke p_0 und p_1 lasten. Das System wird durch die folgenden Größen

$$p_1 = 100\,500 \text{ Pa} \quad p_0 = 100\,000 \text{ Pa}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad \rho_{fl} = 789 \text{ kg/m}^3$$



beschrieben. Welche Aussagen sind richtig?

- $h_0 - h_1 = 32,3 \times 10^{-3} \text{ m}$
- $h_0 - h_1 = 15,48 \text{ m}$
- $h_0 - h_1 = 64,6 \times 10^{-3} \text{ m}$
- $h_0 - h_1 = 0,15 \text{ m}$

Oberflächenspannung

(1)

- Die Oberflächenspannung ist nicht von der Temperatur abhängig.
- Der Kontaktwinkel kann nur Werte zwischen 0° und 90° annehmen.
- Die Oberflächenspannung ist eine Kraft pro Länge.
- Für eine Seifenblase ist die Differenz zwischen Innen und Außendruck gleich $\frac{4\sigma}{R}$, wobei σ die Oberflächenspannung und R der Radius der Seifenblase ist.

Hydrostatik

(1)

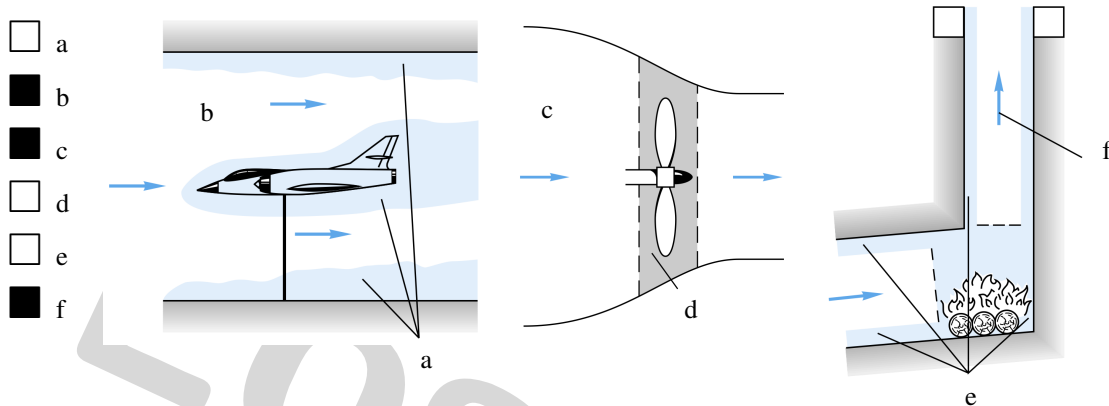
Der Druck 1m unterhalb des Meeresspiegels ist ungefähr

- ... 10^3 Pa .
- ... 10^4 Pa .
- ... 10^5 Pa .
- ... 10^6 Pa .

Bernoulli-Gleichung

(1)

Kreuzen Sie an für welche Bereiche die Bernoulli-Gleichung gültig ist



- a
- b
- c
- d
- e
- f

Navier-Stokes-Gleichung

(1)

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_A + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_B + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_C + \underbrace{w \frac{\partial u}{\partial z}}_D = \underbrace{g_x}_E - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_F + \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}_{G, H, I}$$

- für stationäre Strömungen ist $A = 0$.
- für den Fall einer laminaren, geschichteten Strömung zwischen zwei ebenen Platten in x-Richtung ist $C = D = 0$.
- C beschreibt die Fluidzusammensetzung.
- Die Terme B, C und D beschreiben die konvektive Beschleunigung der jeweiligen Koordinatenrichtung.

Reynoldszahl

(1)

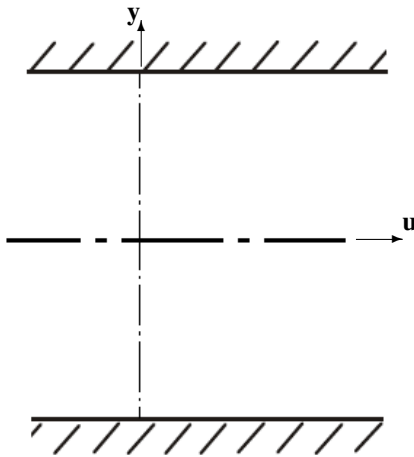
Welche der Aussage über die Reynoldszahl stimmt?

- $Re = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}$.
- Je größer Re , desto größer die Einlaufänge in einem Rohr.
- Ist die Re -Zahl größer als die kritische Reynoldszahl, ist die Strömung laminar.

Rohrströmung

(2)

Zeichnen und benennen Sie ein laminares sowie ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil übereinander in den gegebenen Rohrquerschnitt



Rohrströmung

(1)

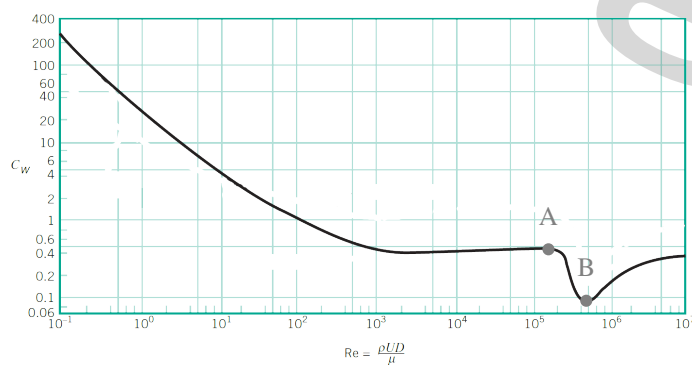
Welche der Aussage über eine laminare Rohrströmung stimmt?

- Die Durchmischung ist besser als in einer turbulenten Rohrströmung.
- Der Druckverlust ist geringer als in einer turbulenten Rohrströmung.
- Die Re-Zahl ist größer als in einer turbulenten Rohrströmung.
- Die Wandrauhigkeit hat keinen Einfluss.

Umströmte Kugel

(1)

Der Widerstandsbeiwert c_w einer Kugel wird bei einer kritischen Reynoldszahl plötzlich kleiner (von A -> B). Was ist die Ursache dafür?

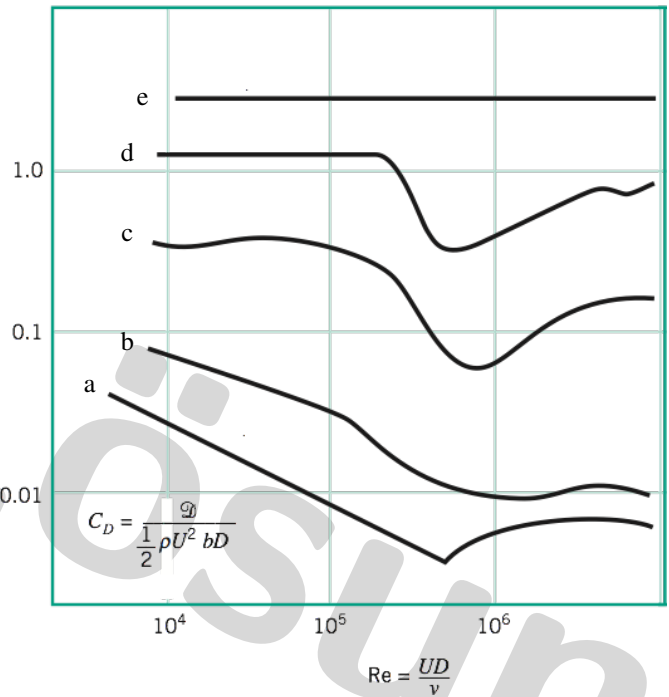
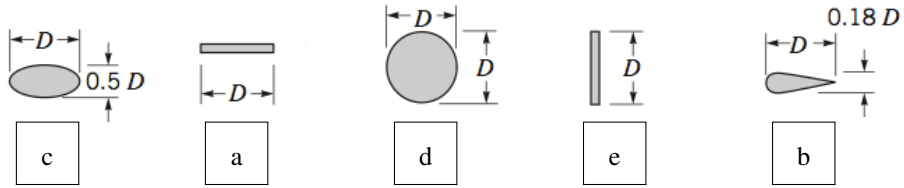


- Der Ablösepunkt der Strömung verschiebt sich stromaufwärts.
- Der Reibungswiderstand wird infolge des laminar-turbulenten Umschlags der Grenzschicht kleiner.
- Die Rauigkeit der Körperoberfläche hat keinen Einfluss mehr.
- Der Druckwiderstand wird geringer.

Widerstand

(2)

Ordnen Sie die dargestellten Widerstandsverläufe den umströmten Körper zu.



Lavaldüse

(1)

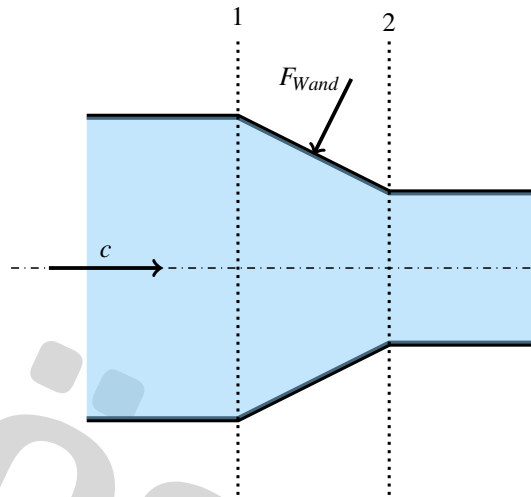
Ordnen Sie die Geschwindigkeitsverläufe den entsprechenden Lavaldüsen A bis D zu.

A		B	
C		D	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30px; margin: 0 auto;">A</div>		<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30px; margin: 0 auto;">D</div>	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30px; margin: 0 auto;">B</div>		<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30px; margin: 0 auto;">C</div>	

2. Wandkraft auf Düse (5 Punkte)

Hinweis: Die Ergebnisse der Kurzaufgaben sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen. Geben Sie zusätzlich den Rechenweg an.

Auf die Innenwand einer horizontal durchströmten Düse wirkt durch die Wand eine Kraft F_W auf das strömende Fluid. Bei bekannter Fluidichte ρ , Querschnittsflächen A_1 und A_2 , Eintrittsdruck p_1 und dem Austrittsdruck p_2 sowie der Eintrittsgeschwindigkeit c_1 soll diese Wandkraft bei angenommener verlustfreier Strömung ermittelt werden.



Gegeben: A_1 A_2 p_1 p_2 ρ c_1

(a) Bestimmen Sie c_2

	Symbolschreibweise
c_2	$c_1 \frac{A_1}{A_2}$ ①

(b) Bestimmen Sie die resultierende Kraft in x-Richtung.

	Symbolschreibweise
F_x	$F_{Wx} = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 + \rho \cdot A_1 \cdot c_1^2 - \rho \cdot A_2 \cdot c_2^2$ ①

(c) Bestimmen Sie die resultierende Kraft in y-Richtung.

	Symbolschreibweise
F_y	0 ①

Lösung

Impulssatz am Kontrollvolumen Kräftebilanz in y-Richtung

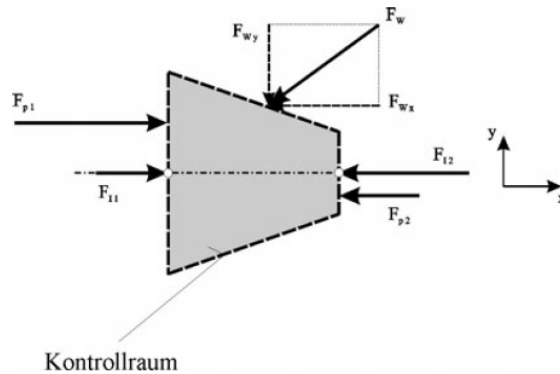


Abb. 1 Auf Kontrollvolumen wirkende Kräfte

$$\sum F_{iy} = 0 = -F_{Wy} \quad (1)$$

$$F_{Wy} = 0 \quad (2)$$

Kräftebilanz in x-Richtung

$$\sum F_{ix} = 0 = F_{p1} + F_{I1} - F_{Wx} - F_{p2} - F_{I2} \quad (3)$$

$$F_{Wx} = F_{p1} + F_{I1} - F_{p2} + F_{I2} \quad (4)$$

Druckkräfte: zusammen für F_{p1} und F_{p2} 0.5

$$F_{p1} = p_1 \cdot A_1 \quad (5)$$

$$F_{p2} = p_2 \cdot A_2 \quad (6)$$

Impulskräfte: zusammen für F_{I1} und F_{I2} 0.5

$$F_{I1} = c_1 \cdot \dot{m} \quad (7)$$

$$F_{I2} = c_2 \cdot \dot{m} \quad (8)$$

Einsetzen in Kräftebilanz:

$$F_{Wx} = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 + \rho \cdot A_1 \cdot c_1^2 - \rho \cdot A_2 \cdot c_2^2 \quad (9)$$

$$F_{Wx} = (p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2) - \rho \cdot A_1 \cdot c_1^2 \cdot \left[\frac{A_2 \cdot c_2^2}{A_1 \cdot c_1^2} - 1 \right] \quad (10)$$

Eventuell: mithilfe der Kontinuitätsgleichung für den inkompressiblen Fall

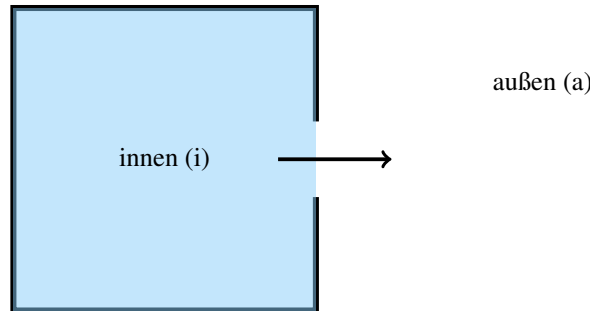
$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} \quad (11)$$

folgt für die Wandkraft:

$$F_{Wx} = (p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2) - \rho \cdot A_1 \cdot c_1^2 \cdot \left[1 + \frac{A_2^2}{A_1^2} - 2 \cdot \frac{A_1}{A_2} \right] \quad (12)$$

3. Kessel (11 Punkte)

In einem großen Druckluftkessel entsteht ein 1 cm^2 großes Leck. Die Zustandsänderung kann als isentrop angenommen werden.



Gegeben: $T_i = 330\text{ K}$ $p_a = 1\text{ bar}$ $T_a = 288\text{ K}$ $R = 287\text{ J/(kg K)}$ $\kappa = 1,4$ $A = 1\text{ cm}^2$

(a) Bestimmen Sie den Kesselinnendruck p_i .

	Symbolschreibweise	Wert
p_i	$p_a \cdot \left[\frac{T_a}{T_i} \right]^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}$ ①	1,6104 bar ①/3

(b) Ist das Druckverhältniss aus Kesselinnendruck und Umgebungsdruck unter- oder überkritisch? Begründen Sie!

unterkritisch, weil $\frac{p_a}{p_i} > \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$ ① für Begründung + ① für richtiges Kreuz

überkritisch, weil

(c) Bestimmen Sie den Leckagemassenstrom \dot{m} .

	Symbolschreibweise	Wert
\dot{m}	$\frac{p_a}{R \cdot T_a} A \cdot \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot R \cdot T_i \cdot \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}$ ①	0,0351 kg/s ①/3

(d) Wie groß ist der Leckagemassenstrom \dot{m} , wenn T_i anstatt 330 K 355 K ist?

	Symbolschreibweise	Wert
\dot{m}^*	$a \frac{p_a}{R \cdot T_a} A$ ①	0,041 kg/s ①/3

Lösung

(a) Der Behälterinnendruck lässt sich mithilfe der isentropen Zustandsgleichung bestimmen:

$$\frac{T_a}{T_i} = \left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (13)$$

$$p_i = p_a \cdot \left[\frac{T_a}{T_i} \right]^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (14)$$

$$p_i = 1,6104 \text{ bar} \quad (15)$$

$$(16)$$

(b) Das Druckverhältnis, welches sich einstellt ist unterkritisch, d.h. die Strömungsgeschwindigkeit in der Leckageöffnung wird $Ma = 1$ nicht erreichen.

(c) Da das Fluid im Behälter sich in Ruhe befindet ($c_i = 0$), ergibt sich die Strömungsgeschwindigkeit in der Leckageöffnung zu:

$$c_a = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot R \cdot T_i \cdot \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_i} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (17)$$

$$c_a = 290,4 \text{ m/s} \quad (18)$$

Damit beträgt der Leckagemassenstrom:

$$\dot{m} = \rho_a \cdot A \cdot c_a \quad (19)$$

$$= \frac{p_a}{R \cdot T_a} \cdot A \cdot c_a \quad (20)$$

$$= 0,0351 \text{ kg/s} \quad (21)$$

(d) Da die Temperatur im Inneren des Kessels geändert wurde, muss der Innendruck p_i^* neu berechnet werden.

$$p_i = p_a \cdot \left[\frac{T_a}{T_i^*} \right]^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (22)$$

$$= 2,08 \text{ bar} \quad (23)$$

Somit ergibt sich das Druckverhältnis zu

$$\frac{p_a}{p_i^*} = 0,48 < \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \right)} \quad (24)$$

und ist somit überkritisch. Daher wird sich das Fluid im engsten Querschnitt der Düse mit Schallgeschwindigkeit bewegen.

$$c = a = \sqrt{\kappa R T_a} = 340 \text{ m/s} \quad (25)$$

Damit beträgt der Leckagemassenstrom:

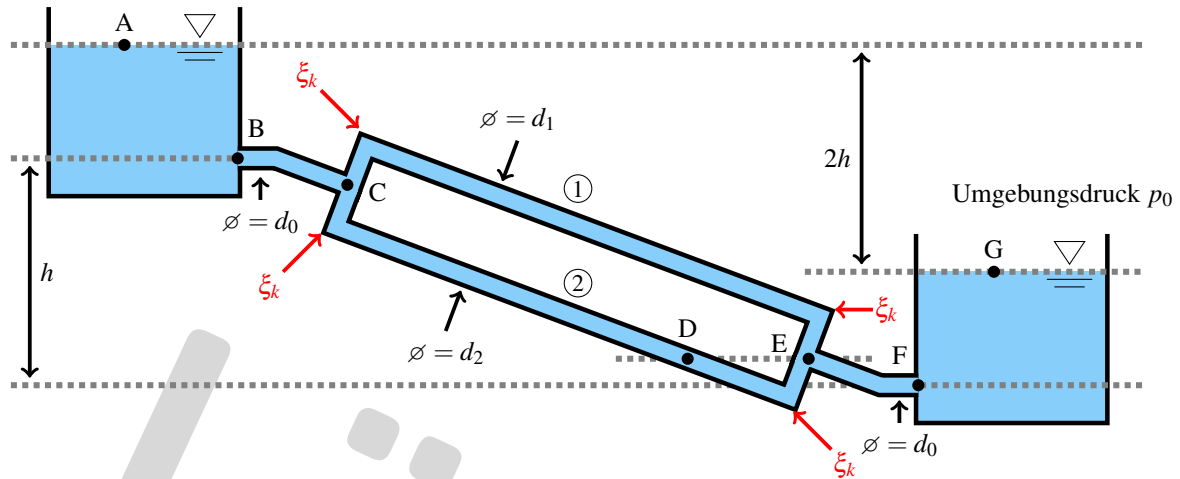
$$\dot{m}^* = \rho_a \cdot A \cdot a \quad (26)$$

$$= \frac{p_a}{R \cdot T_a} \cdot A \cdot a \quad (27)$$

$$= 0,041 \text{ kg/s} \quad (28)$$

4. Verbundene Wasserreservoirs (22 Punkte)

Zwei Wasserreservoirs sind durch eine geteilte Rohrleitung miteinander verbunden. Die Hohendifferenz von Ablauf in Reservoir A und Zulauf in Reservoir B beträgt 10m. Das Wasser fließt von Reservoir A durch eine sich teilende und wiedervereinigende Rohrleitung in Reservoir B. Die Länge der Rohre 1 und 2 beträgt jeweils 100m und der Rohrdurchmesser beträgt 50mm (Rohr 1) bzw. 100mm (Rohr 2). Die Füllstände beider Wasserbecken soll als konstant angenommen werden.



Gegeben:

$d_1 = 50 \text{ mm}$	$l_1 = 100 \text{ m}$	$h = 10 \text{ m}$
$d_2 = 100 \text{ mm}$	$l_2 = 100 \text{ m}$	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$		$Re_{krit} = 2300$
$\xi_k = 0,11$	$\nu = 1,14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	

Gefragt:

Für die Symbolschreibweise dürfen die gegebenen Parameter und die in vorherigen Teilaufgaben bestimmten Parameter benutzt werden.

Hinweis: In den Aufgabenteilen (a)-(d) sei die Rohrreibung zunächst vernachlässigbar.

- (a) Wie groß ist der Druckunterschied $p_B - p_F$ für die angegebenen Füllhöhen?

Hinweis: Verwenden Sie für diesen Abschnitt nicht die Bernoulli-Gleichung von B nach F.

	Symbolschreibweise	Wert insgesamt ②
$p_B - p_F$	$\rho g h$ ①	98 100 Pa

- (b) Wie groß ist den Volumenstrom \dot{V}_1 in Rohr 1?

	Symbolschreibweise	Wert
\dot{V}_1	$\sqrt{\frac{2gh}{\xi_k}} \frac{d_1^2 \pi}{4}$ ①	0,0829 m ³ /s

(c) Wie groß ist den Volumenstrom \dot{V}_2 in Rohr 2?

	Symbolschreibweise	Wert
\dot{V}_2	$\sqrt{\frac{2gh}{\xi_k} \frac{d_2^2 \pi}{4}}$ ①	0,332 m ³ /s

(d) Wie groß ist der gesamt Volumenstrom \dot{V} ?

	Symbolschreibweise	Wert
\dot{V}	$\sqrt{\frac{2gh}{\xi_k} \frac{d_1^2 + d_2^2 \pi}{4}}$ bzw. $\dot{V}_1 + \dot{V}_2$ ①	0,415 m ³ /s

(e) Wie groß ist der Durchmesser D eines einzelnen Ersatzrohr mit Länge $L = 100\text{m}$, welches das Doppelrohr ersetzt und den gleichen Volumenstrom ermöglicht. Rohrreibung soll mit berücksichtigt werden. Nehmen Sie an, dass die Strömung laminar ist.

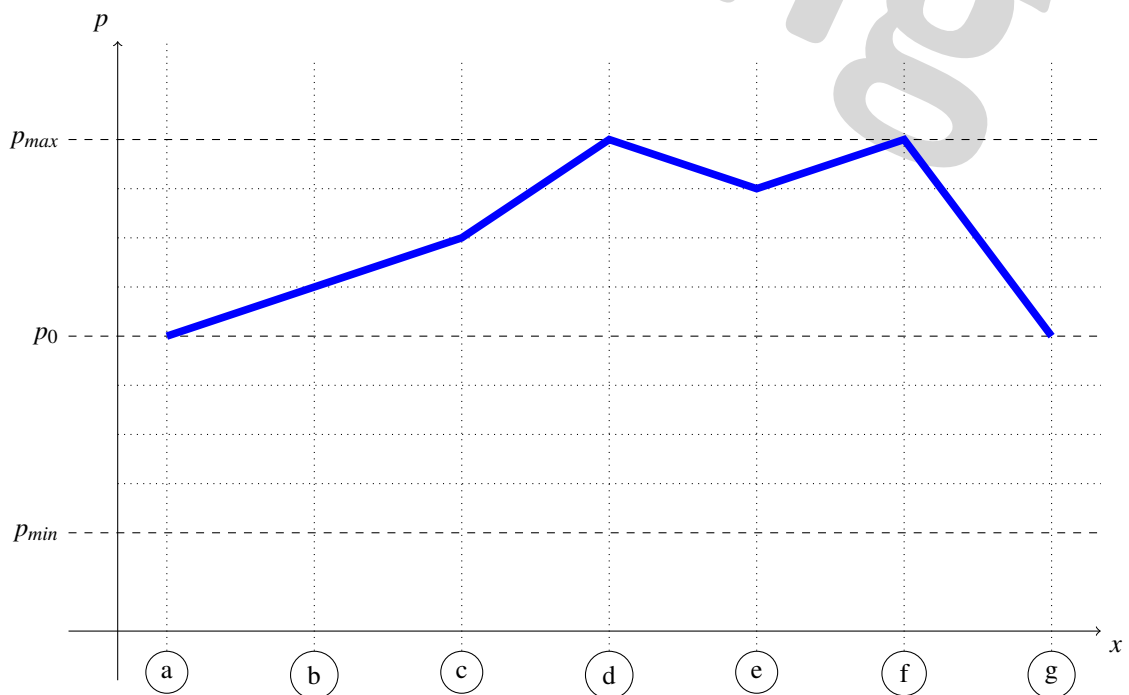
	Symbolschreibweise	Wert
D	$\left(\frac{128\rho\dot{V}Lv}{\pi^2 p_{BF}}\right)^{1/4}$ ①	0,056 m

(f) War die Annahme einer laminare Strömung berechtigt?

ja, weil

nein, weil $Re = 3,13 \times 10^6 > Re_{krit}$ ①

(g) Tragen Sie den Druckverlauf ein. ④



Lösung

- (a) $p_B - p_F$
Bernoulli $A \rightarrow B$,

$$p_A + \frac{1}{2}\rho c_A^2 + z_A \rho g = p_B + \frac{1}{2}\rho c_B^2 + z_B \rho g$$

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho c_A^2 + z_A \rho g = p_B + \frac{1}{2}\rho c_B^2 + z_B \rho g$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho c_B^2 = p_0 - p_B + \rho g(z_A - z_B) \quad \text{1a}$$

Bernoulli $F \rightarrow G$,

$$p_G + \frac{1}{2}\rho c_G^2 + z_G \rho g = p_F + \frac{1}{2}\rho c_F^2 + z_F \rho g$$

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho c_G^2 + z_G \rho g = p_F + \frac{1}{2}\rho c_F^2 + z_F \rho g$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho c_F^2 = p_0 - p_F + \rho g(z_G - z_F) \quad \text{1b}$$

Massenbilanz

$$c_B = c_F \quad \text{1c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho c_B^2 = \frac{1}{2}\rho c_F^2$$

$$\Rightarrow p_0 - p_B + \rho g(z_A - z_B) = p_0 - p_F + \rho g(z_G - z_F)$$

Zusammen

$$\Rightarrow p_B - p_F = \rho g(z_A - z_B) - \rho g(z_G - z_F)$$

$$\Rightarrow p_B - p_F = \rho g[(z_A - z_G) - (z_B - z_F)]$$

$$\Rightarrow p_B - p_F = \rho gh$$

- (b) Volumenstrom \dot{V}_1 in Rohr 1
Bernoulli $B \rightarrow F$ durch Rohr 1

$$p_B + \frac{1}{2}\rho c_B^2 + z_B \rho g = p_F + \frac{1}{2}\rho c_F^2 + z_F \rho g + \Delta p_{BF,1}$$

$$p_B + \frac{1}{2}\rho c_B^2 + z_B \rho g = p_F + \frac{1}{2}\rho c_F^2 + z_F \rho g + \Delta p_{BF,1}$$

$$\Rightarrow \Delta p_{BF,1} = (p_B - p_F) + \rho g(z_B - z_F) \quad \text{1d}$$

Druckverlust

$$\Delta p_{BF,1} = \frac{1}{2}2\rho c_1^2 \xi_k \quad \text{1e}$$

Zusammen

$$\rho c_1^2 \xi_k = (p_B - p_F) + \rho gh = 2\rho gh$$

$$\Rightarrow c_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\xi_k}} \quad \text{1f}$$

Volumenstrom

$$\dot{V}_1 = c_1 \pi \frac{d_1^2}{4} = \sqrt{\frac{2gh}{\xi_k}} \frac{d_1^2}{4} \pi$$

(c) Volumenstrom \dot{V}_2 in Rohr 2 Ähnlich wie vorher.

$$\rho c_2^2 \xi_k = (p_B - p_F) + \rho gh = 2\rho gh$$

$$\Rightarrow c_2 = \sqrt{\frac{2gh}{\xi_k}} = c_1 \quad \text{lg}$$

Volumenstrom

$$\dot{V}_2 = c_2 \pi \frac{d_2^2}{4} = \sqrt{\frac{2gh}{\xi_k}} \frac{d_2^2}{4} \pi$$

(d) Gesamt Volumenstrom \dot{V}

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{2gh}{\xi_k}} \left(\frac{d_1^2 + d_2^2}{4} \right) \pi$$

(e) Durchmesser D des Ersatzrohr

$$\Delta p_{BF,1} = 2\rho gh$$

und

$$\Delta p_{BF,1} = \frac{1}{2} \rho c^2 \frac{L}{D} \lambda$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{lh}$$

$$= \frac{1}{2} \rho c^2 \frac{L}{D} \frac{64}{Re}$$

$$Re = \frac{cD}{\nu} \quad \text{li}$$

$$= \frac{1}{2} \rho c^2 \frac{L}{D} \frac{64\nu}{cD}$$

Zusammen

$$\Delta p_{BF,1} = 32\rho c \frac{L}{D^2} \nu (= 2\rho gh)$$

mit

$$\dot{V} = c\pi \frac{D^2}{4}$$

$$c = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} \quad \text{lj}$$

gibt

$$\begin{aligned}\Delta p_{BF,1} &= 32\rho \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} \frac{L}{D^2} \nu \\ &= \frac{128\rho\dot{V}L\nu}{\pi D^4} \\ \Rightarrow D^4 &= \frac{128\rho\dot{V}L\nu}{\pi^2\Delta p_{BF,1}} \\ \Rightarrow D &= \left(\frac{128\rho\dot{V}L\nu}{\pi^2\Delta p_{BF,1}}\right)^{1/4}\end{aligned}$$

(f) Laminar oder turbulent?

$$\begin{aligned}Re &= \frac{cD}{\nu} \\ &= \frac{4\dot{V}D}{\pi D^2\nu} \\ &= \frac{4\dot{V}}{\pi D\nu} \gg Re_{krit}\end{aligned}$$

Lösung