Leibniz Universität Hannover
Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik

Klausur
Strömungsmechanik 1
Frühjahr 2015

5. März 2015, Beginn 16:30 Uhr

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht, => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- Mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

Weitere Hinweise:
Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Aufgabe	Punkte
1. Verständnisfragen	12
2. Inkompressible Strömungen	29
3. Kompressible Strömungen	8,5
Gesamt	49,5

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Prof. Dr.-Ing. J. Seume
B. Drechsel, C. Hamann, T. Hauptmann

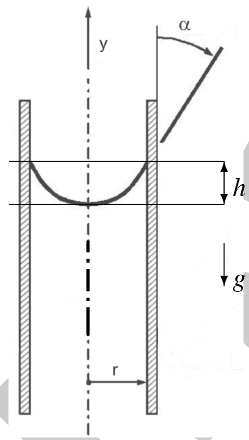
1. Verständnisfragen (12 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.
(Nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet.)

Oberflächenspannung U-Rohr-Manometer (1)

Das gezeigte System sei durch

$\sigma = 0.072\,\mathrm{N/m}$ $\quad \alpha = 45°$ $\quad \rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ $\quad d = 6\,\mathrm{mm}$



beschrieben. Welche Aussagen sind richtig?

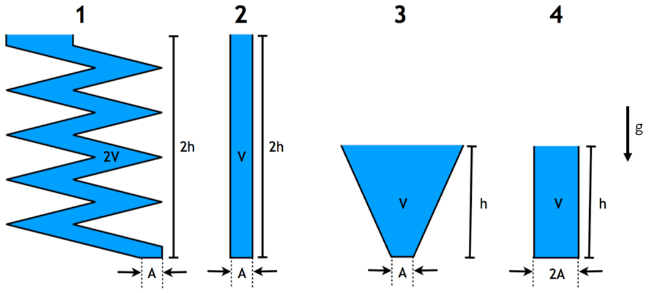
- [x] h=$3.46 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
- [ ] h=$6.92 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$
- [ ] h=$6.92 \times 10^{-3}\,\mathrm{N\,m}$
- [ ] h=$6.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,m}$

Strömungsvisualisierung (1)

Welche Aussagen sind richtig?

- [x] Stromröhren sind normal zur Strömungsrichtung massendicht.
- [x] Stromröhren sind durch Stromlinien begrenzt.
- [ ] Stromröhren weisen stets einen kreisförmigen Querschnitt auf.

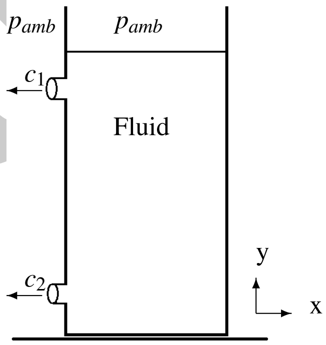
Hydrostatik **(1)**



- [ ] Der Druck am Boden von Gefäß 1 > Gefäß 2
- [x] Der Druck am Boden von Gefäß 2 > Gefäß 4
- [ ] Der Druck am Boden von Gefäß 3 < Gefäß 4.
- [ ] Der Druck am Gefäßboden ist unabhängig von der Fluiddichte.

Ausfluss aus Behälter **(1)**

Der Behälter ist unendlich groß. Der Untergrund ist reibungsfrei.



- [ ] $c_1 > c_2$.
- [x] Das Gefäß bewegt sich in positive x-Richtung.
- [ ] c_1(Fluid=Wasser) > c_1(Fluid=Ethanol)

Reynoldszahl (1)

Welche der Aussage über die Reynoldszahl stimmt?

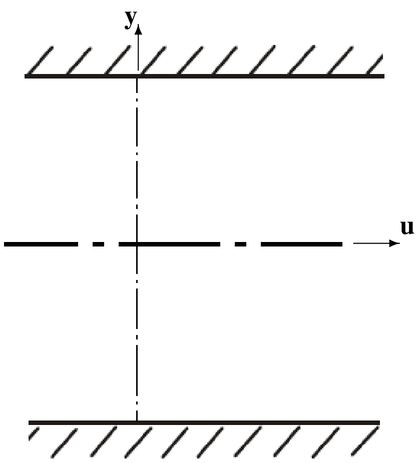
■ $Re \propto \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}$.

□ Ist die Re-Zahl größer als die kritische Reynoldszahl, ist die Strömung laminar.

■ Wenn die Re-Zahl gegen unendlich geht, können Reibungseffekte vernachlässigt werden.

Rohrströmung (2)

Zeichnen und benennen Sie ein laminares sowie ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil übereinander in den gegebenen Rohrquerschnitt



Moody-Diagramm (1)

Welche der Aussagen stimmen für eine Rohrströmung mit

Mittlere Geschwindigkeit $\bar{c}_m = 120\,\mathrm{m/s}$; Radius $r = 10\,\mathrm{mm}$; Kinematische Viskosität $\nu = 1.004 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$; Sandkornrauheit $k_s = 1.6 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$

□ Die Strömung ist laminar.

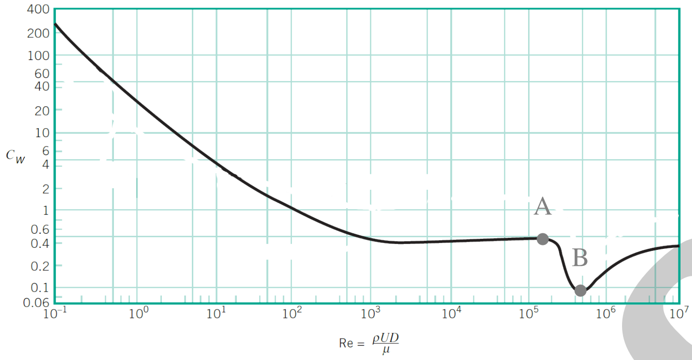
■ Die Strömung ist turbulent.

□ Das Rohr ist als hydraulisch glatt anzusehen.

■ Das Rohr ist als hydraulisch rauh anzusehen.

Umströmte Kugel **(1)**

Der Widerstandsbeiwert c_W einer Kugel wird bei einer kritischen Reynoldszahl plötzlich kleiner (von A -> B). Was ist die Ursache dafür?



- [x] Der Ablösepunkt der Strömung verschiebt sich stromaufwärts.
- [ ] Der Reibungswiderstand wird infolge des laminar-turbulenten Umschlags der Grenzschicht kleiner.
- [ ] Die Rauigkeit der Körperoberfläche hat keinen Einfluss mehr.
- [x] Der Druckwiderstand wird geringer.

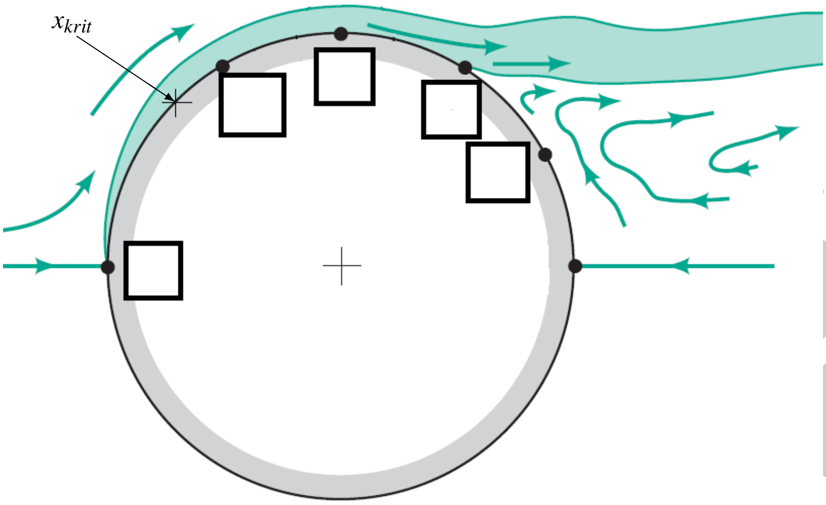
Auftriebskraft am Tragflügel **(1)**

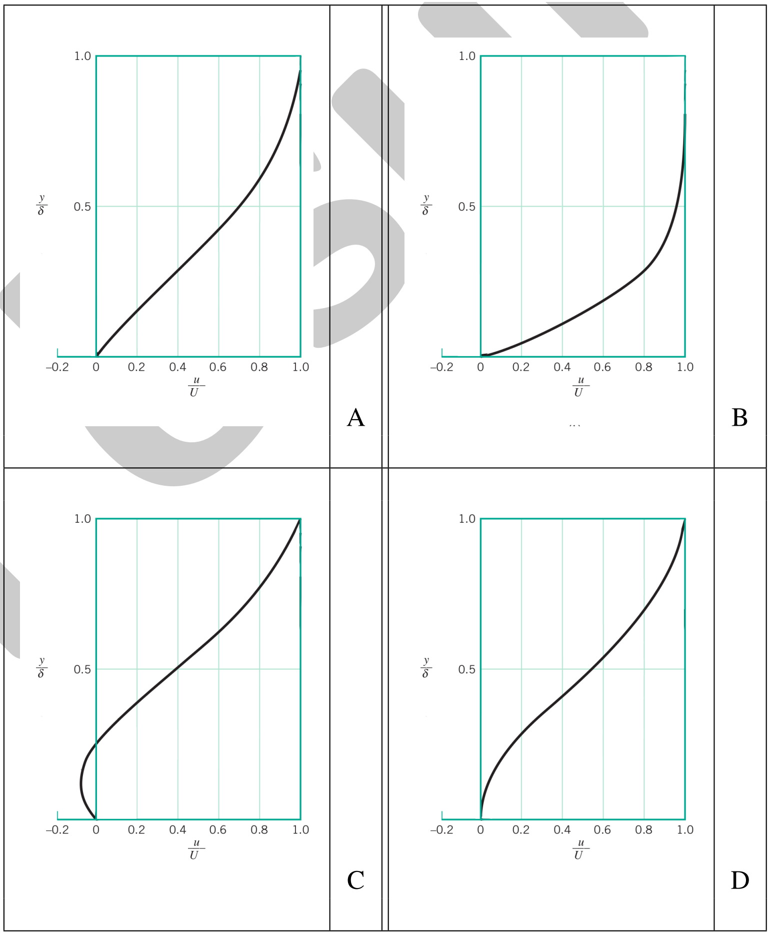
Was ist die Voraussetzung für eine Auftriebskraft an einem Tragflügel?

- [ ] Der statische Druck oberhalb des Flügels ist größer als unterhalb.
- [ ] Abriss der Strömung auf der Saugseite.
- [x] Der statische Druck unterhalb des Flügels ist größer als oberhalb.

Grenzschicht an umströmtem Zylinder (2)

Ordnen Sie die dargestellten Geschwindigkeitsprofile den Positionen am umströmten Zylinder zu. Die jeweiligen Geschwindigkeitsprofile können nur einer Position zugeordnet werden.





2. Inkompressible Strömungen

2.1. Strahlwinkel im Freistrahldiffusor (11 Punkte)

In den skizzierten Freistrahldiffusor strömt Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit c_1 ein. Ein Teil der einströmenden Flüssigkeitsmenge wird bei [3] als Freistrahl unter dem Winkel α in die Umgebung (Druck p_0) ausgeblasen. Innerhalb des Rohres sei die Strömung reibungsfrei, sodass die Bernoulli-Gleichung entlang jeder Stromlinie gilt. Die auf die Anordnung ausgeübte Kraft in y-Richtung, F_y, ist aus Symmetriegründen gleich null, die Kraft in x-Richtung, F_x, ist wegen reibungsfreier Strömung gleich null.

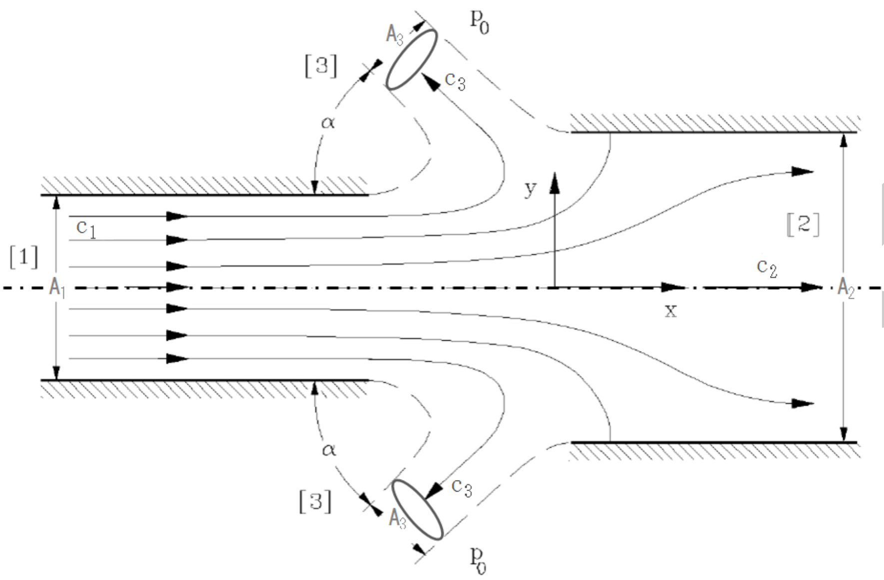


Abb. 1 Strahlwinkel im Freistrahldiffusor

Gegeben:

c_1	c_2	c_3
A_1	A_2	ρ
p_0		

Gefragt:

(a) Wie groß ist der Querschnitt A_3 an der Stelle [3]?

	Symbolschreibweise
A_3	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c_1}{c_3} \cdot A_1 - \frac{c_2}{c_3} \cdot A_2\right)$ 1

(b) Wie groß ist die Druckdifferenz p_1-p_0?

	Symbolschreibweise
$p_1 - p_0$	$\frac{\rho}{2}(c_3^2 - c_1^2)$ 1

(c) Wie groß ist die Druckdifferenz p_2-p_0?

	Symbolschreibweise
$p_2 - p_0$	$\frac{\rho}{2}(c_3^2 - c_2^2)$ 1

(d) Berechnen Sie aus der Forderung F_x=0 den Winkel α, den die Freistrahlen mit der x-Achse bilden

	Symbolschreibweise
α	$\arccos([1 + (\frac{c_2}{c_3})^2] \cdot \frac{A_2}{4A_3} - [1 + (\frac{c_1}{c_3})^2] \cdot \frac{A_1}{4A_3})$ 1

Lösung

a) Strahldicke A_3

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$c_1 A_1 = c_2 A_2 + 2 c_3 A_3 \tag{1}$$

$$\Rightarrow A_3 = \frac{1}{2}(\frac{c_1}{c_3} \cdot A_1 - \frac{c_2}{c_3} \cdot A_2) \tag{2}$$

b) Druckdifferenz p_1-p_0

An der Stelle [3] ist der Druck im Freistrahl p_3 gleich dem Umgebungsdruck p_0, da die Krümmung der Stromlinien verschwindet. Die Bernoulli Gleichung formuliert für die Punkte [1] und [3] lautet:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} c_2^3 \quad \text{1a} \tag{3}$$

$$\Rightarrow p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2}(c_3^2 - c_1^2) \tag{4}$$

c) Druckdifferenz p_2-p_0

Für die Punkte [1] und [2] erhalten wir:

$$p_2 + \frac{\rho}{2} c_1^2 = p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 \quad \text{1b} \tag{5}$$

$$\Rightarrow p_2 - p_0 = \frac{\rho}{2}(c_1^2 - c_2^2) + (p_1 - p_0) \tag{6}$$

bzw. mit (4)

$$\Rightarrow p_2 - p_0 = \frac{\rho}{2}(c_3^2 - c_2^2) \tag{7}$$

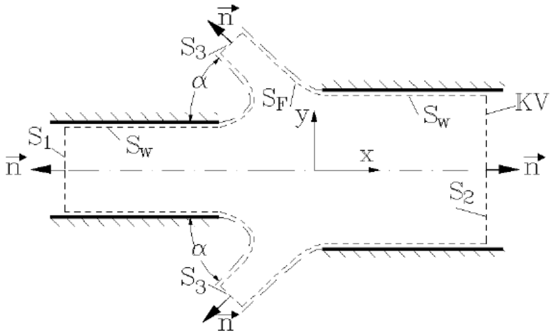


Abb. 2 Strahlwinkel im Freistrahldiffusor

d) Strahlwinkel α

Impulssatz in x-Richtung:

$$\iint\limits_S \rho \vec{c} \cdot \vec{e_x}(\vec{c} \cdot \vec{n})dS = \iint\limits_S \vec{t} \cdot \vec{e_x} dS \tag{8}$$

Aufteilung:

$$S = S_F + S_W + S_1 + S_2 + S_3 \quad \text{1c} \; eq: formel_f \tag{9}$$

Das Integral des Impulsflusses über die Wandfläche SW und die Freistrahlränder verschwinden, da in beiden Fällen der Flächennormalenvektor senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor steht. Die Gleichung (**??**) ausgewertet pro Tiefeneinheit wird zu

$$-\rho c_1^2 A_1 + \rho c_2^2 A_2 - 2 \cdot \rho c_3^2 A_3 \cos\alpha = p_1 A_1 - p_2 A_2 + p_0(A_2 - A_1). \tag{10}$$

Druckkräfte (an 1, 2) 1d

Druckkraft (an 3) 1e

Impulskräfte (an 1, 2) 1f

Impulskraft (an 3) 1g

2.2. Zierbrunnen mit Wasserfontäne (18 Punkte)

Sie planen, einen neuen Zierbrunnen mit Wasserfontäne in Ihrem Garten zu bauen. Um diesen mit Wasser zu versorgen, wollen Sie Ihren alten Gartenbrunnen mit Saugpumpe und vorhandenem Rohrsystem ($D_1 = 7.5\,\text{cm}$) nutzen. Dafür schließen Sie den Zierbrunnen mit einem weiteren Rohr ($D_2 = 5.0\,\text{cm}$) an das vorhandene System an. Um auch Ihren neidischen Nachbarn zu beeindrucken, soll die Wasserfontäne eine Höhe von $h_{\text{Fontäne}} = 4.0\,\text{m}$ erreichen (siehe Abb. 3).

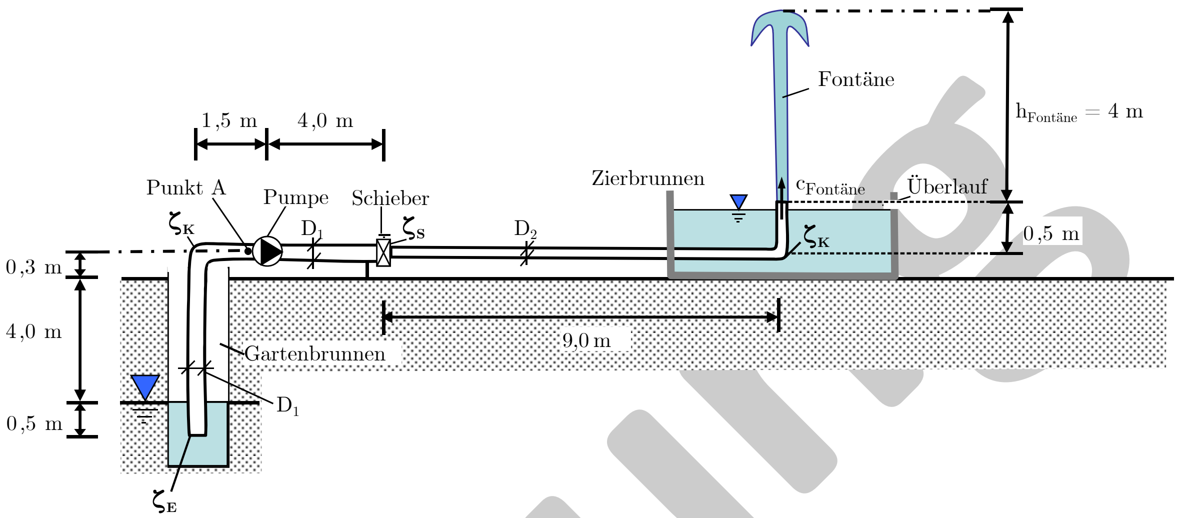


Abb. 3 Gartenbrunnen mit Rohrsystem und Zierbrunnen

Gegeben:

$D_1 = 7.5\,\text{cm}$	$D_2 = 5\,\text{cm}$	$h_{\text{Fontäne}} = 4\,\text{m}$
$\rho_W = 1000\,\text{kg/m}^3$	$g = 9.81\,\text{m/s}^2$	$\nu = 1 \times 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$
$\zeta_E = 0,3$	$\zeta_K = 0,4$	$\zeta_S = 0,5$
$k_{s,\text{Rohr}} = 0.15\,\text{mm}$		$\eta = 0,8$

Gefragt:

(a) Berechnen Sie die Austrittsgeschwindigkeit $c_{\text{Fontäne}}$ des Wassers, die erforderlich ist, um die gewünschte Höhe der Fontäne $h_{\text{Fontäne}} = 4\,\text{m}$ zu erreichen.

	Wert
$c_{\text{Fontäne}}$	$8.86\,\text{m/s}$ 0,5

(b) Berechnen Sie die installierte Pumpenleistung, die erforderlich ist um die Fontäne zu betreiben
Hinweis 1: Der Schieber wird mit derselben Geschwindigkeit wie das zweite Rohrsegment durchströmt.

	Wert
P_{inst}	$7.54\,\text{kW}$ 0,5

(c) Bestimmen Sie die Druckdifferenz $p_0 - p_A$ zwischen dem Punkt A direkt vor der Pumpe und der Umgebung.

	Wert
$p_0 - p_A$	70996.6 Pa 0,5

Lösung

a)

Zunächst wird die erforderliche Austrittsgeschwindigkeit über die Bernoulli-Gleichung im freien Wasserstrahl berechnet. Dabei ist Punkt 0 auf Höhe der Austrittsöffnung der Fontänendüse und Punkt 1 befindet sich am Scheitelpunkt der Fontäne.

$$\frac{c_{\text{Fontäne}}^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = \frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \quad \text{1a} \tag{11}$$

mit

$$p_0 = p_1 \tag{12}$$

$$z_0 = 0 \tag{13}$$

$$c_1 = 0 \tag{14}$$

$$z_1 = h_{\text{Fontäne}} \qquad jew.\ 0{,}25\ \sum 1 \tag{15}$$

$$c_{\text{Fontäne}} = \sqrt{2g \cdot h_{\text{Fontäne}}} \quad \text{1c} = 8.86\,\text{m/s} \tag{16}$$

b)

Bernoulli-Gleichung zwischen Grundwasserspiegel und Scheitelpunkt Fontäne

$$\rho\frac{c_0^2}{2} + p_0 + g\cdot\rho\cdot z_0 + \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{V}} = \rho\frac{c_{\text{Fontäne}}^2}{2} + p_1 + g\cdot\rho\cdot z_1 + \Delta p_{\text{Verlust}} \qquad \text{2d} \tag{17}$$

Die Verluste $\Delta p_{\text{Verlust}}$ lassen sich gemäß Gl. 6.21 der FS in Rohrreibungsverluste und Verluste durch Rohreinbauten (Krümmer usw.) unterteilen:

$$\Delta p_{12} = \sum_k \frac{1}{2}\rho c_k^2 \lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2}\rho c_i^2 \zeta_i \tag{18}$$

Für das vorliegende System ergibt sich daher

$$\Delta p_{12} = \frac{1}{2}\rho c_1^2 \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \frac{1}{2}\rho c_2^2 \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \frac{1}{2}\rho c_1^2(\zeta_E + \zeta_K) + \frac{1}{2}\rho c_2^2(\zeta_S + \zeta_K) \tag{19}$$

$$jew.\ 0{,}5 -> \sum \text{2e} \tag{20}$$

mit der Geschwindigkeit

$$c_2 = c_{\text{Fontäne}} \tag{21}$$

im zweiten Rohrabschnitt und

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \qquad \text{0,5f} \rightarrow c_1 = c_{\text{Fontäne}} \frac{A_2}{A_1} = 3.938\,\text{m/s} \tag{22}$$

im ersten Rohrabschnitt.
Die Rohrreibungszahl λ wird mithilfe des Moodydiagramm bestimmt: Rohr 1:

$$Re_1 = \frac{c_1 \cdot D_1}{\nu} = 2.95 \times 10^5 \qquad \text{1g} \tag{23}$$

$$k_{\text{s,Rohr}}/D_1 = 2 \times 10^{-3} \tag{24}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2.4 \times 10^{-2} \qquad \text{1h} \tag{25}$$

Rohr 2:

$$Re_2 = \frac{c_2 \cdot D_2}{\nu} = 4.43 \times 10^5 \qquad \text{1i} \tag{26}$$

$$k_{\text{s,Rohr}}/D_2 = 3 \times 10^{-3} \tag{27}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 2.6 \times 10^{-2} \qquad \text{1j} \tag{28}$$

Damit ergeben sich die Strömungsverluste in dem Rohrsystem zu

$$\Delta p_{12} = 260\,202.88\,\text{Pa} \tag{29}$$

Die erforderliche installierte Pumpenleistung beträgt daher

$$\dot{W}_{12} = (\rho \cdot g * \Delta h_{12} + \Delta p_{12}) \cdot \frac{c_1 \cdot \pi \cdot D_1^2}{4\eta} \qquad \text{2k} \tag{30}$$

Δh_{12} ist hier die Höhendifferenz zwischen Wasseroberfläche und Scheitelpunkt der Fontäne

cy)

Bernoulli-Gleichung zwischen Grundwasserspiegel und Punkt A:

$$\frac{c_0^2}{g} + \frac{p_0}{\rho} + z_0 \cdot g = \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + z_A \cdot g + \Delta p_{\text{Verlust}} \qquad \text{1l} \tag{31}$$

Mit den Verlusten

$$\Delta p_{\text{Verlust}} = \frac{1}{2}\rho c_1^2 \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \text{1m} + \frac{1}{2}\rho c_1^2 (\zeta_E + \zeta_K) \text{1n} \tag{32}$$

ergibt sich

$$(p_0 - p_A) = \rho \frac{c_1^2}{2} + (z_A - z_0) \cdot g \cdot \rho + \frac{1}{2}\rho c_1^2 \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \frac{1}{2}\rho c_1^2 (\zeta_E + \zeta_K) = 70\,996.6\,\text{Pa} \tag{33}$$

3. Kompressible Strömungen

3.1. Gasbehälter mit Kolben (8,5 Punkte)

Ein sehr großer zylindrischer Gasbehälter wird gegenüber der Atmosphäre von einem Kolben vollkommen abgedichtet. Der Kolben mit der Masse m erzeugt im Behälter einen homogenen Druck p_1. An der Stelle 2 im Behälterboden strömt das Gas aufgrund des Drucks p_1 mit der Geschwindigkeit c_2 ins Freie. Zwischen Kolben und Behälterwand sollen keine Haft- oder Reibungskräfte wirksam werden.

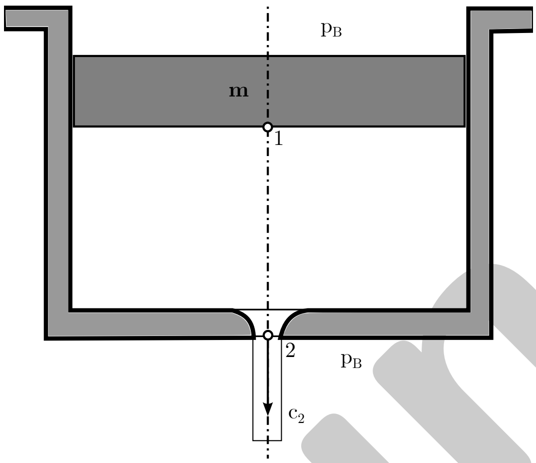


Abb. 4 Gasbehälter mit Kolben

Gegeben:

$D_1 = 300\,\text{mm}$	$T_1 = 27\,°\text{C}$	$c_2 = 100\,\text{m/s}$
$p_B = 1\,\text{bar}$	$\kappa = 1,4$	$R_i = 287\,\text{N m K/kg}$

Gefragt:

(a) Geben Sie die Gleichung für den resultierenden Druck p_1 in Symbolschreibweise an!

	Symbolschreibweise
p_1	$p_B + \frac{4g\cdot m}{\pi D_1^2}$ 1

(b) Geben Sie die Gleichung für die Kolbenmasse m an, die erforderlich ist, um die Austrittsgeschwindigkeit c_2 zu erzeugen?

	Symbolschreibweise
m	$\frac{\pi}{4}D_1^2\cdot\frac{p_B}{g}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{c_2^2}{2}\cdot\frac{(\kappa-1)}{\kappa}\cdot\frac{1}{R_i\cdot T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}-1\right]$ 2

(c) Wie groß ist die Kolbenmasse m sowie der Innendruck p_1 unter Verwendung der oben genannten Größen?

	Wert
p_1	106 030 Pa 0,5
m	43.45 kg 0,5

Lösung

a)

Kräfteggw. am Kolben

$$\sum F_z = 0 = F_{p1} - F_G - F_{pB} \qquad \text{1a} \tag{34}$$

mit

$$F_{p1} = p_1 \cdot A_1 \tag{35}$$
$$F_G = g \cdot m \tag{36}$$
$$F_{pB} = p_B \cdot A_1 \qquad jew.\ 0{,}5 -> \sum 1{,}5\text{b} \tag{37}$$
$$\tag{38}$$
$$\rightarrow p_1 = p_B + \frac{4g \cdot m}{\pi D_1^2} \tag{39}$$

b)

Bei der vorgegebenen Austrittsgeschwindigkeit c_2 , die bei dem isentropen Strömungsvorgang entscheidend vom Druck p_1 und somit wiederum von der gesuchten Kolbenmasse m abhängt, ist als Ansatz Gl. 6.57 aus der FS zu verwenden:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa}\frac{\rho_1}{p_1}\left(c_2^2 - c_1^2\right)\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad \text{1d} \tag{40}$$

mit

$$c_1 = 0 \tag{41}$$
$$p_2 = p_B \qquad jew.\ 0{,}5 -> \sum 1 \tag{42}$$

sowie p_1 aus Aufgabenteil a)

$$p_1 = p_B + \frac{4g \cdot m}{\pi D_1^2} \tag{43}$$

ergibt sich die Masse des Gewichtes zu:

$$m = \frac{\pi}{4} D_1^2 \cdot \frac{p_B}{g}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{c_2^2}{2} \cdot \frac{(\kappa-1)}{\kappa} \cdot \frac{1}{R_i \cdot T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} - 1\right] \tag{44}$$