Klausur

Strömungsmechanik 1
Frühjahr 2016

10. März 2016, Beginn 16:00 Uhr

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- Mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

Weitere Hinweise:
Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Aufgabe	Punkte
1. Verständnisfragen	9
2. Inkompressible Strömungen	32
3. Kompressible Strömungen	12
Gesamt	53

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Prof. Dr.-Ing. J. Seume
C. Hamann, T. Hauptmann

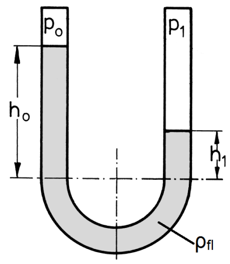
1. Verständnisfragen (9 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.
(Nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet.)

Höhendifferenz U-Rohr-Manometer **(2)**

Berechnen Sie die Höhendifferenz $h_0 - h_1$, die sich im gezeigten U-Rohr-Manometer einstellt, wenn auf den beiden Schenkeln die Drücke p_0 und p_1 lasten. Das System wird durch die folgenden Größen

$p_1 = 102\,700\,\text{Pa}$ $\quad p_0 = 100\,000\,\text{Pa}$
$g = 9.81\,\text{m/s}^2$ $\quad \rho_{fl} = 1030\,\text{kg/m}^3$

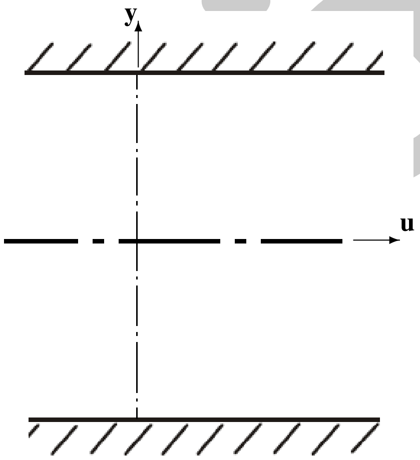


beschrieben. Welche Aussagen sind richtig?

- [x] $h_0 - h_1 = 26.7 \times 10^{-2}\,\text{m}$
- [ ] $h_0 - h_1 = 7.38\,\text{m}$
- [ ] $h_0 - h_1 = 13.36 \times 10^{-2}\,\text{m}$
- [ ] $h_0 - h_1 = 2.14\,\text{m}$

Rohrströmung **(2)**

Zeichnen und benennen Sie ein laminares sowie ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil, ungefähr gleichen Volumenstroms, übereinander in den gegebenen Rohrquerschnitt.



Rohrströmung **(2)**

In einem geraden Rohr mit dem Durchmesser $d = 2\,\text{cm}$ fließt Wasser ($\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$, $\nu = 1\times10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$) mit einer mittleren Geschwindigkeit von $c_m = 0.0625\,\text{m/s}$. Wie hoch ist der Druckverlust Δp_V wenn das Rohr 1.5 m lang ist und Sie Einlaufeffekte vernachlässigen.

- [ ] 2 bar
- [ ] 70 Pa
- [ ] 2 Pa
- [x] 7.5 Pa
- [ ] 18 000 Pa

Wasserkanal **(1)**

In einem Wasserkanal (Abb. 1) fließt Wasser ($\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$, $\nu = 1\times10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$) mit einer mittleren Geschwindigkeit von $c_m = 0.6\,\text{m/s}$ durch eine rechteckige Messstrecke (Breite=50 cm). Der Wasserstand in der Messstrecke beträgt 50 cm. Am Ende der Messstrecke wird die Strömung um 180° umgelenkt und durch ein Rohr mit dem Innendurchmesser $d_i = 30\,\text{cm}$ zurückgeführt. Wie hoch ist die mittlere Geschwindigkeit c_m im Rohr. Die Strömung ist als verlustfrei anzusehen.

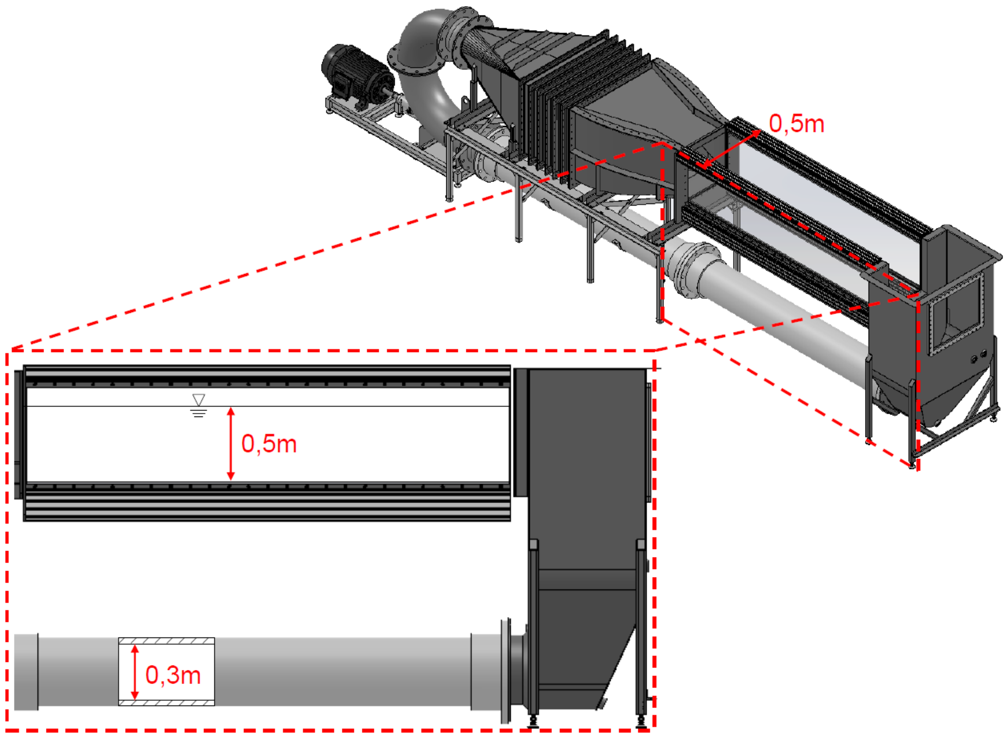


Abb. 1 Wasserkanal

- [ ] 1.42 m/s
- [ ] 0.8 m/s
- [x] 2.12 m/s
- [ ] 1.2 m/s
- [ ] 3.24 m/s

Auftriebskraft am Tragflügel (2)

Ein Airbus A380 hat eine projizierte Flügelfläche von $735m^2$ und eine Startmasse von 569 t. Beim Abheben beträgt die Geschwindigkeit $270km/h$ (Dichte $\rho = 1.15\,\mathrm{kg/m^3}$). Wie groß ist der notwendige Auftriebsbeiwert c_A beim Start?

- ☐ 3,37
- ■ 2,35
- ☐ 1,02
- ☐ 7,23

2. Inkompressible Strömungen

2.1. Bewässerungsanlage (22,5 Punkte)

Aus einem großen Bergsee B_1 wird mittels einer Pumpe (Wirkungsgrad η = 0,8) Wasser in einen Behälter B_2 gefördert. Das Wasser tritt als Freistrahl in den Behälter B_2 oberhalb des Wasserspiegels auf der Höhe h_2 ein. Der Umgebungsdruck p_0 ist konstant. Das Wasser wird über ein Rohrleitungssystem über eine Pumpe mit der Leistung P zum Behälter B_2 geführt. Das Rohrleitungssystem besteht aus dem Rohrsegment 1 (D_1, l_1 und λ_1), dem Rohrsegment 2 (D_2, l_2 und $k_{s,2}$) und einem Schieber (ξ_S). Die Krümmer des Rohrsystems sind ebenfalls verlustbehaftet (ξ_K). Der Einlauf der Rohrleitung ist in der Höhe h_1 unterhalb der Wasseroberfläche angebracht. Die Strömung bis zur Pumpe kann als verlustfrei betrachtet werden.
Am Behälter B_2 ist eine Leitung mit dem Durchmesser D_3 zur Versorgung einer Bewässerungsanlage angeschlossen. Aus dem Behälter wird der Volumenstrom $\dot{V}$ für die Bewässerungsanlage entnommen. Aus dem See B_1 wird jeweils soviel Wasser in den Behälter B_2 gefördert, dass die Höhe des Wasserspiegels h_3 konstant bleibt.

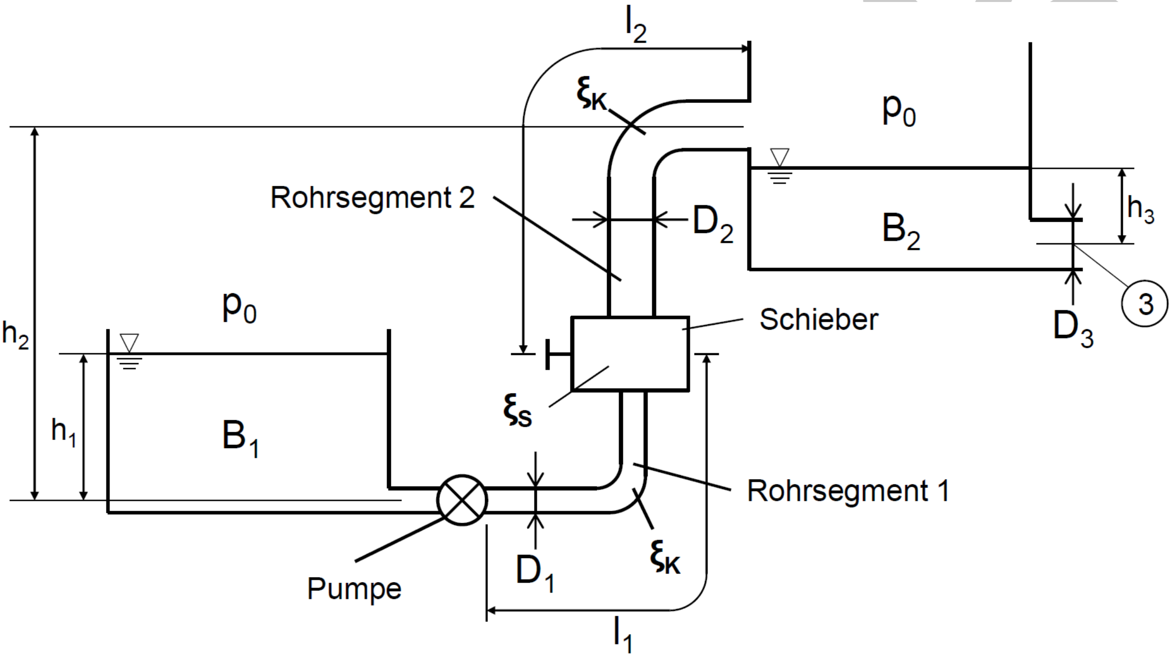


Abb. 2 Pumpenanlage zur Bewässerung

Gegeben:

$D_1 = 5\,\text{cm}$	$D_2 = 7.5\,\text{cm}$	$D_3 = 8\,\text{cm}$
$D_{\text{Düse}} = 30\,\text{mm}$	$h_1 = 20\,\text{m}$	$h_2 = 41\,\text{m}$
$l_1 = 30\,\text{m}$	$l_2 = 40\,\text{m}$	$p_0 = 1\,\text{bar}$
$p_3 = 2\,\text{bar}$	$\dot{V} = 100\,\text{m}^3/\text{h}$	$\lambda_1 = 0,015$
$\xi_K = 0,4$	$\xi_S = 0,6$	$k_{s,2} = 0.025\,\text{mm}$
$\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$	$\nu = 1 \times 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$	$\eta_{\text{Pumpe}} = 0,8$

2.1.1

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit an der Stelle 3, wenn die Bewässerungsanlage mit einem Volumenstrom $\dot{V} = 100\,\text{m}^3/\text{h}$ versorgt wird.

	Symbolschreibweise	Wert
c_3	$\frac{4\cdot\dot{V}}{\pi\cdot D_3^2}$ 1	$5.53\,\text{m/s}$ 0.5

(b) Berechnen Sie die notwendige Höhe h_3 des Wasserspiegels im Behälter B_2, wenn der Volumenstrom $\dot{V} = 100\,\text{m}^3/\text{h}$ in der Bewässerungsanlage benötigt wird und der Druck an der Stelle 3 $p_3 = 2$ bar betragen soll.

	Symbolschreibweise	Wert
h_3	$\frac{p3-p0}{g\cdot\rho} + \frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{\dot{V}^2}{g\cdot D_3^4}$ 1	$11.75\,\text{m}$ 0.5

(c) Bestimmen Sie die Pumpenleistung P, die erforderlich ist.
Hinweis: Der gesamte Leistungseintrag in das gezeigte System geschieht an der Pumpe.
Hinweis: Der Schieber wird mit derselben Geschwindigkeit wie das Rohrsegment 2 durchströmt.

	Symbolschreibweise	Wert
P	$\frac{\dot{V}}{\eta_{\text{Pumpe}}}\left[\frac{\rho}{2}c_2^2 + g\cdot\rho(h_2-h_1) + (p_{V,R1}+p_{V,R2}+p_{V,K1}+p_{V,K2S})\right]$ 1	$46.74\,\text{kW}$ 0.5

2.1.2

An den Behälter B_2 wird für die Bewässerung ein Schlauch angeschlossen. Zur gleichmäßigen Bewässerung der Grünanlage ($\dot{V} = 100\,\text{m}^3/\text{h}$) hat der Schlauch mit der Düse einen Neigungswinkel von $\alpha = 30°$.
Hinweis 1: Der Höhenunterschied zwischen Düse und Leitung ist zu vernachlässigen.
Hinweis 2: Die Verluste im Schlauch und Düse sind zu vernachlässigen.
Hinweis 3: Der Strahl weitet sich nicht auf.

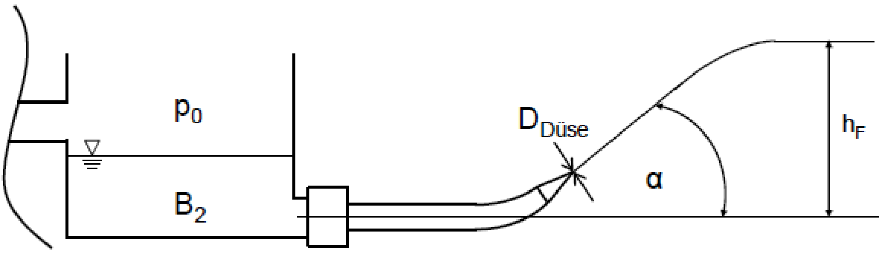


Abb. 3 Behälter B_2 mit angeschlossenem Schlauch

(a) Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeit der Düse $c_{\text{Düse}}$.

	Symbolschreibweise	Wert
$c_{\text{Düse}}$	$\frac{4\cdot\dot{V}}{\pi\cdot D_{\text{Düse}}^2}$ 1	39.30 m/s od. 15.81 m/s 0.5

(b) Berechnen Sie die Höhe h_F des sich einstellenden Wasserstrahls.

	Symbolschreibweise	Wert
h_F	$\frac{c_{\text{Düse}}^2\cdot\left[1-(\cos\alpha)^2\right]}{2\cdot g}$ 1	19.67 m od. 3.18 m 0.5

Lösung

3.1 a)

Der Volumenstrom $\dot{V}$ ist bekannt und an der Stelle 3 gilt:

$$\dot{V} = \frac{\pi}{4}\cdot D_3^2\cdot c_3 \qquad \text{1a} \tag{1}$$

Für die Geschwindigkeit c_3 folgt

$$c_3 = \frac{4\cdot\dot{V}}{\pi\cdot D_3^2} \tag{2}$$

b)

Aufstellen der verlustfreien Bernoulli Gleichung vom Flüssigkeitsspiegel des Behälters B_2 (Index "2") zum Austritt der Rohrleitung an der Stelle 3 (Index "3"):

$$\rho\frac{c_2^2}{2}+p_2+g\cdot\rho\cdot z_2 = \rho\frac{c_3^2}{2}+p_3+g\cdot\rho\cdot z_3 \qquad \text{1b} \tag{3}$$

Mit

$$z_3 = 0 \qquad z_2 = h_3 \qquad p2 = p0 \qquad c_2 = 0 \qquad p3 = 2bar \quad \text{0,5c} \tag{4}$$

folgt

$$p_0 + g\cdot\rho\cdot h_3 = \rho\frac{c_3^2}{2} + p_3 \tag{5}$$

Aufgelöst nach h_3 und c_3 eingesetzt

$$h_3 = \frac{p3 - p0}{g\cdot\rho} + \frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{\dot{V}^2}{g\cdot D_3^4} = 11,75m \tag{6}$$

c)

Bernoulli-Gleichung zwischen Wasserspiegel Behälter B_1 (Index "1") und dem Austritt der Rohrleitung über Behälter B_2 (Index "2")

$$\rho\frac{c_1^2}{2} + p_1 + g\cdot\rho\cdot z_1 + \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{V}} = \rho\frac{c_2^2}{2} + p_2 + g\cdot\rho\cdot z_2 + \Delta p_{\text{Verlust}} \quad \text{1d} \tag{7}$$

Mit

$$z_1 = h_1 \qquad z_2 = h_2 \qquad p1 = p2 = p0 \qquad c_1 = 0 \quad \text{0,5e} \tag{8}$$

Die Verluste $\Delta p_{\text{Verlust}}$ lassen sich gemäß Gl. 6.21 der FS in Rohrreibungsverluste und Verluste durch Rohreinbauten (Krümmer usw.) unterteilen:

$$\Delta p_{12} = \sum_k \frac{1}{2}\rho c_k^2 \lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2}\rho c_i^2 \zeta_i \tag{9}$$

Für das vorliegende System ergibt sich daher

$$\Delta p_{12} = \frac{1}{2}\rho c_{R1}^2 \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} + \frac{1}{2}\rho c_2^2 \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} + \frac{1}{2}\rho c_{R1}^2 \xi_K + \frac{1}{2}\rho c_2^2(\xi_S + \xi_K) \tag{10}$$

$$jew. \text{0,5} -> \sum \text{2,5f} \tag{11}$$

Die Geschwindigkeiten in den Rohrsegmenten ergeben sich aus der Massenstromerhaltung zu:

$$c_{R1} = \frac{c_3\cdot A_3}{A_1} = 14.10\,\text{m/s} \quad \text{0.5g} \tag{12}$$

$$c_2 = \frac{c_3\cdot A_3}{A_2} = 6.25\,\text{m/s} \quad \text{0.5h} \tag{13}$$

Bestimmung des Druckverlust in Leitung 1:
Da die Rohrreibungszahl bereits gegeben ist, ergibt sich der Druckverlust aufgrund von Reibung hier direkt zu

$$p_{V,R1} = \frac{1}{2}\rho c_1^2 \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} = 894\,645\,\text{Pa} \tag{14}$$

Bestimmung des Druckverlust in Leitung 2:

$$Re_1 = \frac{c_2\cdot D_2}{\nu} = 4.69\times 10^5 \quad \text{1i} \tag{15}$$

$$\frac{k_{s,2}}{D_2} = 3.33\times 10^{-4} \quad \text{1j} \tag{16}$$

Aus dem Moodydiagramm lässt sich hiermit der Verlustbeiwert bestimmen.

$$\lambda_1 = 0.0179 \quad \text{1k} \tag{17}$$

Der Druckverlust in Leitung 2 aufgrund der Rohrreibung beträgt daher

$$p_{V,R2} = \frac{1}{2}\rho c_2^2 \lambda_1 \frac{l_2}{D_2} = 186458\,\mathrm{Pa} \tag{18}$$

Des Weiteren treten auch Verluste im Krümmer 1 auf

$$p_{V,K1} = \frac{1}{2}\rho c_1^2 \xi_K = 39649.28\,\mathrm{Pa} \tag{19}$$

und im Schieber und Krümmer 2

$$p_{V,K2S} = \frac{1}{2}\rho c_2^2 (\xi_K + \xi_S) = 19531.25\,\mathrm{Pa} \tag{20}$$

Die erforderliche Pumpenleistung ergibt sich aus der umgeformten Bernoulligleichung von Pumpe zu Austritt des Strahlrohrs

$$P_{\text{Pumpe}} = \frac{\dot{V}}{\eta_{\text{Pumpe}}} \left[\frac{\rho}{2} c_2^2 + g \cdot \rho (h_2 - h_1) + (p_{V,R1} + p_{V,R2} + p_{V,K1} + p_{V,K2S})\right] \tag{21}$$

$$= 46.74\,\mathrm{kW} \quad \text{1l} \tag{22}$$

3.2 a)

Der Volumenstrom $\dot{V}$ ist bekannt und an der Düse gilt:
Auch mit Bernoulli möglich.

$$\dot{V} = \frac{\pi}{4} \cdot D_{\text{Düse}}^2 \cdot c_{\text{Düse}} \quad \text{1m} \tag{23}$$

Für die Geschwindigkeit $c_{\text{Düse}}$ folgt

$$c_{\text{Düse}} = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D_{\text{Düse}}^2} \tag{24}$$

b)

Aufstellen der verlustfreien Bernoulli Gleichung von Punkt 1 (Austritt der Düse) nach Punkt 2 (Scheitelpunkt):

$$\rho \frac{c_1^2}{2} + p_1 + g \cdot \rho \cdot z_1 = \rho \frac{c_2^2}{2} + p_2 + g \cdot \rho \cdot z_2 \quad \text{1n} \tag{25}$$

Mit

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = h_F \qquad p1 = p2 = p0 \quad \text{0,5o} \tag{26}$$

Geschwindigkeit im Scheitelpunkt lässt sich mit Hilfe von $c_{\text{Düse}}$ ausdrücken: Horizontale Komponente von c_2 entspricht der horizontalen Komponente von $c_{\text{Düse}}$, da der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Vertikale Komponente im Scheitelpunkt ist $c_{2,\text{vertikal}} = 0$.

$$c_2 = c_{\text{Düse}} \cos \alpha \quad \text{1p} \tag{27}$$

Einsetzen von (27) in (25) und Auflösen nach h_F.

$$h_F = \frac{c_{\text{Düse}}^2 \cdot \left[1 - (\cos\alpha)^2\right]}{2 \cdot g} \tag{28}$$

2.2. Messdüse (9,5 Punkte)

Zur Durchflussmessung einer Flüssigkeit der Dichte $\rho = const$ wird die skizzierte Messdüse in eine Rohrleitung eingebaut. Die Strömungsgeschwindigkeit c_1 am Eintritt der Messstrecke sei über den Querschnitt konstant. Am Austritt sei die Strömung wieder ausgeglichen. Die Reibung an den Rohrwänden kann vernachlässigt werden.

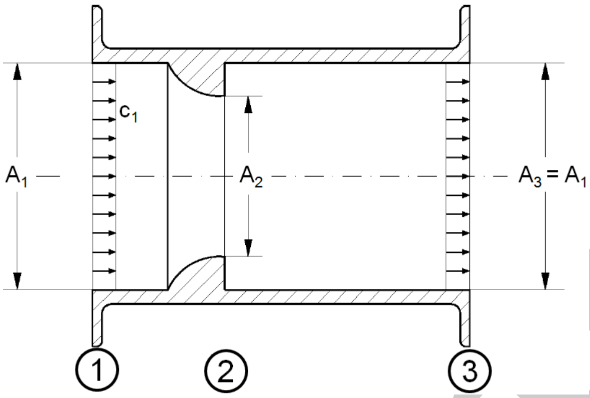


Abb. 4 Messdüse

Gegeben:
ρ, p_1, c_1, A_1, A_2

Gefragt:

(a) Wie groß ist der Druckverlust dieser Messstrecke?

	Symbolschreibweise
Δp_v	$\frac{\rho}{2} c_1^2 \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)$ 1

(b) Wie groß ist der Druck p_3 am Austritt?

	Symbolschreibweise
p_3	$p_1 - \Delta p_v =$ $p_1 - \frac{\rho}{2} c_1^2 \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)$ 1

(c) Wie groß ist die Kraft der Flüssigkeit auf die Messstrecke?

	Symbolschreibweise
F	$\frac{\rho}{2}c_1^2\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right)A_1$ 1

Lösung

3 a)

Druckverlust in der Messstrecke:
Der auftretende Verlust in der Strecke von [1] bis [3] ist der Carnotsche Stoßverlust der unstetigen Querschnittserweiteurng von A_2 auf A_3, über Bernoulli von 2 nach 3:

$$p_2+\frac{\rho}{2}c_2^2=p_3+\frac{\rho}{2}c_3^2 \tag{29}$$ 1a

mit der Randbedingung $z_2 = z_3$ folgt 0,5b

$$p_3-p_2=\Delta p_v=\frac{\rho}{2}\left(c_2^2-c_3^2\right) \tag{30}$$ 0,5c

bzw. mit der Kontinuitätsgleichung

$$c_1A_1=c_2A_2=c_3A_3 \tag{31}$$

auch

$$\Delta p_v=\frac{\rho}{2}c_1^2\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right) \tag{32}$$

3 b)

Der Druck p_3
Die Bernoullische Gleichung mit Verlusten von [1] nach [3]

$$p_1+\frac{\rho}{2}{c_1}^2+\rho g z_1-\Delta p_v=p_3+\frac{\rho}{2}{c_3}^2+\rho g z_3 \tag{33}$$ 0,5d

liefert mit $c_1 = c_3$ und $z_1 = z_3$ 0,5e 0,5f

$$p_3=p_1-\Delta p_v=p_1-\frac{\rho}{2}c_1^2\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right) \tag{34}$$

3 c)

Kraft auf die Düse

Der Impulssatz lautet im Rahmen der Stromfadentheorie für den Fall stationärer Strömung:

$$-\rho_1c_1^2A_1+\rho_1c_3^2A_3=p_1A_1-p_3A_3-F \tag{35}$$ 1g 4x0,5h

wobei F die Kraft auf die Wandung ist ist. Hier ist $\rho_1 = \rho_3 = \rho$ und wir erhalten $A_1 = A_3$

$$F = (p_1 - p_3)A_1 + \rho c_1^2 A_1 \left(1 - \left(\frac{c_3}{c_1}\right)^2\right) \tag{36}$$

Der letzte Ausdruck in der eckigen Klammer verschwindet und wir erhalten

$$F = \frac{\rho}{2} c_1^2 \left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right) A_1 \tag{37}$$

3. Kompressible Strömungen (12 Punkte)

Für einen neuen Testfall am aeroakustischen Windkanal des Instituts für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik wird Luft unter dem Druck p_1, der Temperatur T_1 und der Mach-Zahl Ma_1 durch ein Rohr mit der Querschnittsfläche A_1 geleitet und einer Konvergenten-Divergenten Düse zugeführt. Anschließend wird die Strömung der Messstrecke zugeführt. Dabei entspannt die Strömung auf den Druck p_2, sodass in der Messstrecke ein homogenes Strömungsfeld mit Überschall vorliegt. Im engsten Querschnitt herrscht die Schallgeschwindigkeit c^*. Die Düsenströmung sei stationär und isentrop. Die spezifische Gaskonstante für Luft R sowie der Isentropenexponent κ sind bekannt.

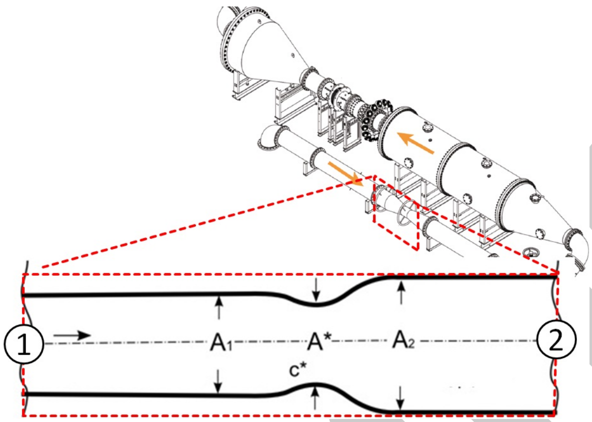


Abb. 5 Konvergent-Divergente Düse

Gegeben:

$c^* = 393\,\mathrm{m/s}$ | $p_1 = 7.6\,\mathrm{bar}$ | $T_1 = 540\,\mathrm{K}$
$Ma_1 = 0,42$ | $A_1 = 0.03\,\mathrm{m}^2$ | $p_2 = 1\,\mathrm{bar}$
$R = 287\,\mathrm{J/kgK}$ | $\kappa = 1,4$

Gefragt:

(a) Bestimmen Sie die Mach-Zahl Ma_2 am Düsenaustritt der Messstrecke.

	Symbolschreibweise	Wert
Ma_2	$\sqrt{\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\left(1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_1^2\right)-1\right]\left(\frac{2}{\kappa-1}\right)}$, wird auch in mehreren Termen akzeptiert 1	2.06 0,5

(b) Wie groß ist der Massenstrom $\dot{m}$ durch die Messstrecke?

	Symbolschreibweise	Wert
$\dot{m}$	$A_1 \cdot \frac{p_1}{T_1 R} \cdot Ma_1 \cdot \sqrt{\kappa R T_1}$ 1	$28.78\,\mathrm{kg/s}$ 0,5

(c) Welche Temperatur T_2 stellt sich am Düsenaustritt in Punkt 2 ein? Wie groß muss die Querschnittsfläche A_2 für die gegebenen Bedingungen gewählt werden?

	Symbolschreibweise	Wert
T_2	$\frac{T_0}{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_2^2\right)}$ 1	249.6 K oder 302.5 K 0,5

	Symbolschreibweise	Wert
A_2	$\frac{\dot{m}RT_2}{p_2c_2}$ 1	0.032 m^2 0,5

(d) Bestimmen Sie ob die Strömung über- oder unterkritisch ist.

	Wert
	überkritisch 1

Lösung

4 a)

Für Ma_2 zuerst p_0 bestimmen

$$p_0 = p_1 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{0,5a} \tag{38}$$

$$p_0 = 7,6bar \left(1 + \frac{1,4-1}{2} 0,42^2\right)^{3,5} = 8,58bar \tag{39}$$

Umformen

$$p_0 = p_2 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_2^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{0,5b} \tag{40}$$

$$\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_2^2\right) \tag{41}$$

$$Ma_2 = \sqrt{\left[\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]\left(\frac{2}{\kappa-1}\right)} = 2,06 \tag{42}$$

$$Ma_2 = \sqrt{\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\left(1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_1^2\right)-1\right]\left(\frac{2}{\kappa-1}\right)} = 2,06 \tag{43}$$

4 b)

Bestimmung des Massenstroms

Ansatz nach Konti-Gleichung, $\dot{m}$ konstant

$$A_1\rho_1 c_1 = \dot{m} \qquad \text{1c} \tag{44}$$

Dichte über ideales Gasgesetz

$$\rho_1 = \frac{p_1}{T_1 R} = 4,903 kg/m^3 \qquad \text{0,5d} \tag{45}$$

Schallgeschwindigkeit c_1:

$$c_1 = Ma_1\sqrt{\kappa R T_1} = 0,42\sqrt{1,4\cdot 287\frac{m^2}{s^2K}\cdot 540K} = 195,63 m/s \qquad \text{0,5e} \tag{46}$$

Massenstrom ergibt sich zu

$$A_1\rho_1 c_1 = \dot{m} = 28,78 kg/s \tag{47}$$

4 c)

Temperatur T_2 und Fläche A_2

Temperatur bestimmen über

$$T_0 = T_2\left(1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_2^2\right) \qquad \text{0,5f} \tag{48}$$

T_0 bei gegebenem c^* ermitteln

$$c^* = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1}RT_0} \tag{49}$$

$$T_0 = \frac{c^{*2}}{\frac{2\kappa}{\kappa+1}R} = 461,27K \tag{50}$$

$$T_2 = \frac{T_0}{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_2^2\right)} = 249,6K\,(oder 302,5K) \tag{51}$$

Fläche A_2 durch Ansatz nach Konti-Gleichung (siehe oben)

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 c_2} \qquad \text{0,5g} \tag{52}$$

Schallgeschwindigkeit aus Mach-Zahl berechnen

$$c_2 = Ma_2\sqrt{\kappa R T_2} = 652,11 m/s\,(oder 717,9 m/s) \tag{53}$$

Dichte ersetzen bzw. bestimmen über ideales Gasgesetz

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 1,39 kg/m^3 \tag{54}$$

$$A_2 = \frac{\dot{m} R T_2}{p_2 c_2} = 0,032 m^2 \tag{55}$$

Über- oder unterkritisch erfolgt durch berechnen des kritischen Druckverhältnisses:

$$\pi^* = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0,528 \quad 0,5h \tag{56}$$

Das vorliegende Druckverhältnis beträgt:

$$\frac{p_2}{p_0} = 0,116 < \pi^* \quad 0,5i \tag{57}$$

Damit überkiritisch.

Formelsammlung

Viskosität

$$\eta = \nu\rho \tag{6.11}$$

mit η : dynamische Viskosität, [Ns/m^2]
ν : kinematische Viskosität, [m^2/s]
ρ : Dichte, [kg/m^3]

Newtonsches Fluid:

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{6.12}$$

mit τ : Scherspannung, [N/m^2]
u : Strömungsgeschwindigkeit, [m/s]
y : Koordinate senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit, [m]

Oberflächenspannung und Kapillarität

Drucksprung Δp in der Phasengrenzfläche eines kugelförmigen Tropfens mit dem Radius r:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad ; \quad \text{mit} \quad \sigma : \text{Oberflächenspannung, [N/m]} \tag{6.13}$$

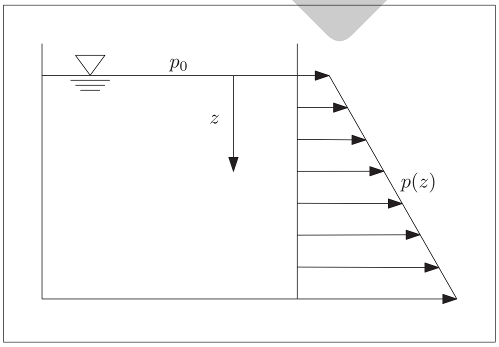
Steighöhe h bei Kapillaren mit kreisförmigem Querschnitt:

$$h = \frac{2\sigma\cos\alpha}{\rho g r} \quad ; \quad \text{mit} \quad \alpha : \text{Randwinkel} \tag{6.14}$$

Hydrostatik

Hydrostatischer Druck:

$$p(z) = p_0 + \rho g z \tag{6.15}$$



Hydrostatischer Auftrieb:

$$F_A = \rho g V \quad ; \quad \text{mit} \quad V : \text{Volumen der verdrängten Flüssigkeit} \tag{6.16}$$

Hydrodynamik

Massenbilanz

$$\frac{\mathrm{d}m_{KV}}{\mathrm{d}t} = \iiint \rho \; \vec{n} \cdot \vec{c} \; \mathrm{d}A \tag{6.17}$$

mit $\vec{n}$: Normalvektor
KV : beliebiges Kontrollvolumen

Impulssatz

$$\iint \rho \vec{c} \; \vec{n} \cdot \vec{c} \; \mathrm{d}A = -\iint p\vec{n} \; \mathrm{d}A + \iiint \rho \vec{g} \; \mathrm{d}V + \vec{F}_R + \vec{F}_{12} \tag{6.18}$$

mit $\vec{F}_R$: Reibungskraft
$\vec{F}_{12}$: Haltekraft/Interaktion mit Wänden

Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho \, c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho \, c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \tag{6.19}$$

Erweiterung für verlustbehaftete Strömungen mit Energiezufuhr:

$$\frac{1}{2}\rho \, c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 + \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{V}} = \frac{1}{2}\rho \, c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{12} \tag{6.20}$$

mit $\dot{W}_{12} > 0$: zwischen Position 1 und 2 zugeführte Leistung, [$\mathrm{N\,m\,s^{-1}}$]
$\dot{V}$: Volumenstrom, [m^3/s]
Δp_{12} : Druckverlust zwischen Position 1 und 2, [Pa]

Druckverlust in Rohrströmungen:

$$\Delta p_{12} = \sum_k \frac{1}{2}\rho \, c_k^2 \, \lambda_k \, \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2}\rho \, c_i^2 \, \xi_i \tag{6.21}$$

mit λ_k : Rohrreibungszahl
l_k : Länge des Rohrabschnitts k
d_k : Durchmesser des Rohrabschnitts k
ξ_i : weitere Verlustbeiwerte des Rohrabschnitts i

Impulsmomentensatz

$$(\rho_2 c_2^2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2} + p_2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2}) - (\rho_1 c_1^2 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1} + p_1 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1}) = \sum \vec{M}_{12} \tag{6.22}$$

mit $\sum \vec{M}_{12}$: Summe der äußeren, an der Oberfläche der Kontrollraumes angereifen Momente
$\vec{e}_t$: Einheitsvektor, in Strömungsrichtung zeigend

Euler'sche Turbinengleichung:

$$M_{12} = \dot{m}(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}) \tag{6.23}$$

mit c_u : Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung
r : Hebelarm

Energiebilanz

$$\left(u_2+\frac{c_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho_2}+g\,z_2\right)-\left(u_1+\frac{c_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho_1}+g\,z_1\right)=q_{12} \tag{6.24}$$

mit u : spez. innere Energie,[J/kg]

$q_{12}=\dot{Q}/\dot{m}$: zwischen Position 1 und 2 zugeführte spezifische Wärmemenge, [J/kg]

Interne Strömungen

Laminare Rohrströmung

Geschwindigkeitsprofil:

$$c(r)=\frac{\Delta p R^2}{4\eta l}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]=c_{\max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{6.25}$$

mit Δp : Druckunterschied zwischen zwei im Abstand l auf den Stromfaden liegenden Punkten

l : Länge des Rohrabschnittes über dem der Druckunterschied Δp auftritt

Volumenstrom:

$$\dot{V}=\frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l} \quad \text{(Gesetz von Hagen-Poiseuille)} \tag{6.26}$$

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p=\frac{1}{2}\rho c_m^2 \lambda \frac{l}{d} \tag{6.27}$$

mit c_m : über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

λ : Rohreibungszahl

Die Rohrreibungszahl für laminare Strömungen ist

$$\lambda=\frac{64}{Re} \tag{6.28}$$

mit der Reynolds-Zahl:

$$Re=\frac{c_m d}{\nu} \tag{6.29}$$

Turbulente Rohrströmung

Geschwindigkeitsprofil:

$$\frac{\overline{c}(r)}{\overline{c}_{\max}}=\left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/7} \quad , \quad Re\leq 10^5 \tag{6.30}$$

Dieses $1/7$-Potenzgesetz gilt nicht in Wandnähe.
Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p=\frac{1}{2}\rho \overline{c}_m^2 \lambda \frac{l}{d} \tag{6.31}$$

mit $\overline{c}_m$: zeitliche und über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

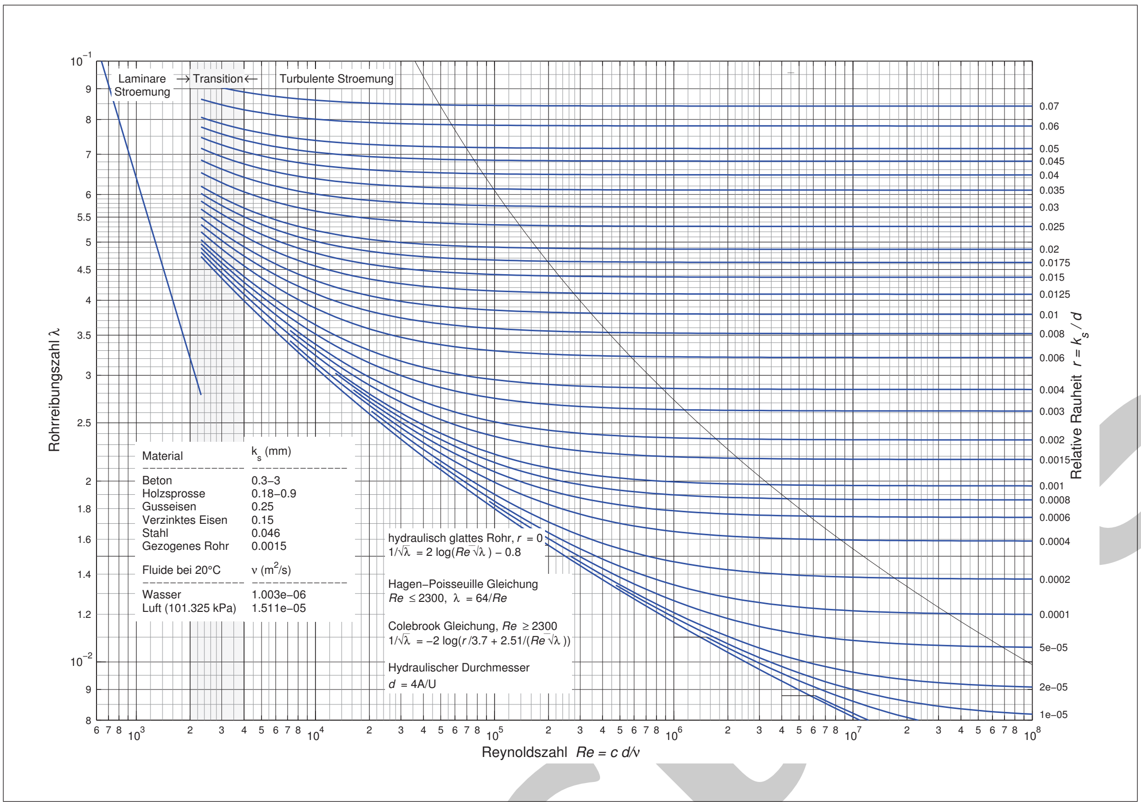
Die Rohrreibungszahl für hydraulisch glatte Rohre:

$$\lambda=\frac{0.3164}{Re^{1/4}} \qquad \text{für} \quad Re\leq 10^5 \quad \text{(Blasius)} \tag{6.32}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\log(Re\sqrt{\lambda})-0,8 \qquad \text{für} \quad 10^5\leq Re\leq 3\cdot 10^6 \quad \text{(Prandtl)} \tag{6.33}$$

Moody-Diagramm

Das Moody-Diagramm stellt die Rohrreibungszahl λ in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re (laminare und turbulente Strömungen) und der äquivalenten Sandkornrauhigkeit k_s für technisch rauhe Rohre dar.



Externe Strömungen

Grenzschicht an einer ebenen Platte

Grenzschichtdicke (laminar):

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}} \tag{6.34}$$

Reynoldszahl bezogen auf die Lauflänge:

$$Re_x = \frac{c_\infty x}{\nu} \tag{6.35}$$

mit c_∞ : Anströmgeschwindigkeit parallel zur Plattenoberfläche
x : überströmte Länge, Beginn: Plattenvorderkante

Laminar-turbulenter Umschlag:

$$Re_{x_{krit}} = \frac{c_\infty x_{krit}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5 \tag{6.36}$$

Strömungswiderstand

Gesamtwiderstand

$$F_W = F_{w,\tau} + F_{w,p} = c_W \frac{\rho}{2} c_\infty^2 A \tag{6.37}$$

mit $F_{w,\tau}$: Widerstandskraft infolge der Reibung
$F_{w,p}$: Widerstandskraft infolge der Druckdifferenz
c_w : Widerstandskoeffizient
A : angeströmmte oder umströmmte Fläche

Reibungswiderstand einer ebenen Platte:

$$c_{w,\tau} = \begin{cases} \dfrac{1,328}{\sqrt{Re_l}} & \text{lam. Grenzschicht} \\ \dfrac{0,074}{Re_l^{1/5}} & \text{turb. Grenzschicht} \end{cases} \tag{6.38}$$

mit $Re_l : \dfrac{c_\infty l}{\nu}$

Ausströmvorgänge

Ausströmgeschwindigkeit für *inkompressibles* Fluid ($c_{innen} = c_0 = 0$):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p_{aus}) + 2gh} \tag{6.39}$$

Ausströmgeschwindigkeit für *kompressibles* Fluid ($c_{in} = 0$):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_0 \left(1 - \left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} \tag{6.40}$$

Massenstrom:

$$\dot{m} = A_{aus} c_{aus} \rho_{aus} = A_{aus} \sqrt{2 p_0 \rho_0}\, \psi \tag{6.41}$$

mit Ausflußfunktion:

$$\psi = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right)} \tag{6.42}$$

Kritisches Druckverhältnis:

$$\left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right)^* = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{6.43}$$

Gasdynamik

Thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad ; \quad \text{mit} \quad R : \text{Gaskonstante, [J/(kg K)] und } T : \text{Temperatur, [K]} \tag{6.44}$$

Isentropenbeziehung:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa-1} \quad ; \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} : \text{Isentropenexponent} \tag{6.45}$$

$$R = c_p - c_v = \frac{\kappa-1}{\kappa} c_p \tag{6.46}$$

Spezifische Enthalpie:

$$h = u + \frac{p}{\rho} \qquad \text{mit} \quad u: \text{spez. innere Energie, [J/kg]} \tag{6.47}$$

Schallgeschwindigkeit:

$$a = \sqrt{\kappa R T} \tag{6.48}$$

Mach-Zahl:

$$Ma = c/a \tag{6.49}$$

Zustandsänderung aus dem Ruhezustand (X_0) für ein ideales Gas bei isentroper, verlustfreier, stationärer Strömung:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \tag{6.50}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{6.51}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{6.52}$$

Zustandsänderung für den kritischen Zustand (X^*) einen idealen Gas in einer isentrope, verlustfreie, stationäre Strömung:

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\kappa + 1}{2} \tag{6.53}$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{6.54}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{6.55}$$

Für die Strömungen zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 auf dem Stromfaden gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right) \tag{6.56}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{6.57}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{6.58}$$