

# Klausur

## Strömungsmechanik 1

### Frühjahr 2017

09. März 2017, Beginn 16:00 Uhr

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- Mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

#### Weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Aufgabe	Punkte
1. Verständnisfragen	9
2. Inkompressible Strömungen	24,5
3. Kompressible Strömungen	17
Gesamt	50,5

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

***Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!***

**Prof. Dr.-Ing. J. Seume  
T. Hauptmann, S. Lehnhoff**

# 1. Verständnisfragen (9 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.  
(Nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet.)

## Strömungsvisualisierung

(1)

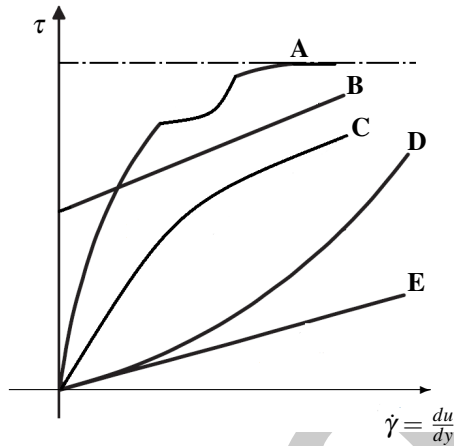
Wann fallen Stromlinien, Bahnlinien und Streichlinien zusammen?

- Nie.
- Wenn die Strömung zweidimensional ist.
- Wenn die Strömung laminar ist.
- Wenn die Strömung stationär ist.

## Viskosität von Flüssigkeiten

(1)

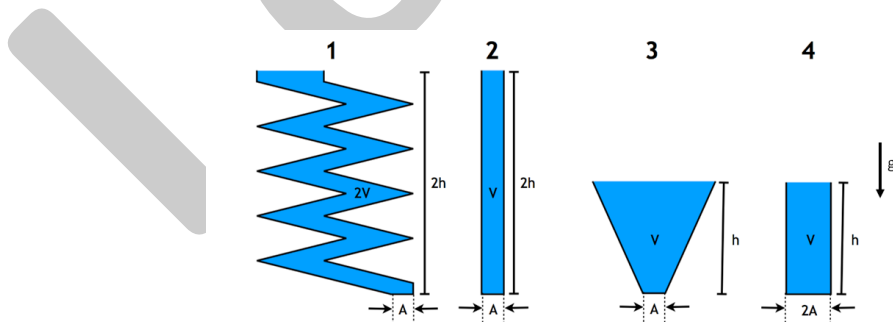
Ordnen Sie die Flüssigkeiten den gezeigten Viskositätsverläufen zu



- D Scherdickende Flüssigkeit
- E Newtonsche Flüssigkeit
- C Scherdünnende Flüssigkeit
- B Bingham Flüssigkeit

## Hydrostatik

(1)

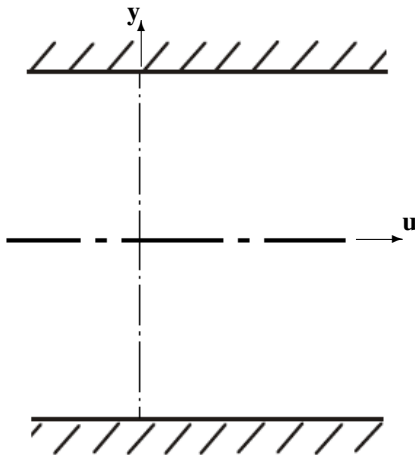


- Der Druck am Boden von Gefäß 1 > Gefäß 2
- Der Druck am Boden von Gefäß 2 > Gefäß 4
- Der Druck am Boden von Gefäß 3 < Gefäß 4.
- Der Druck am Gefäßboden ist unabhängig von der Fluidichte.

**Rohrströmung**

(2)

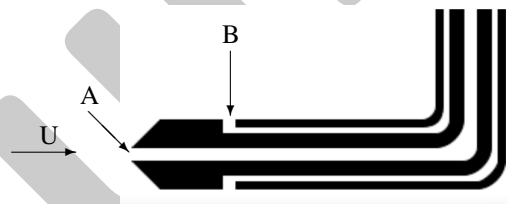
Zeichnen und benennen Sie ein laminares sowie ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil, ungefähr gleichen Volumenstroms, übereinander in den gegebenen Rohrquerschnitt.



**Prandtl-Sonde**

(1)

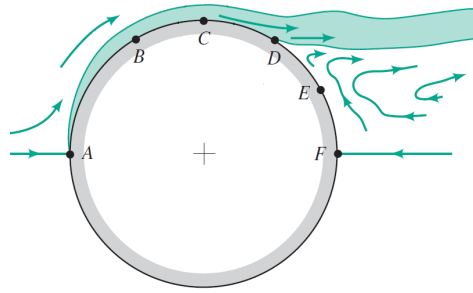
- Die Geschwindigkeit an der Öffnung A ist 0.
- An B wird der statische Druck gemessen.
- B ist der Staupunkt der Sonde.
- Dynamischer Druck = Druck A - Druck B



Grenzschicht an umströmtem Zylinder

(1)

Ordnen Sie die dargestellten Geschwindigkeitsprofile den Positionen A bis F zu.



	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; margin: 0 auto; text-align: center; line-height: 40px;">C</div>		<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; margin: 0 auto; text-align: center; line-height: 40px;">B</div>
	<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; margin: 0 auto; text-align: center; line-height: 40px;">E</div>		<div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; margin: 0 auto; text-align: center; line-height: 40px;">D</div>

Strömungsverhältnisse in der Lavaldüse

(2)

Aus einem Kessel (Ruhegrößen:  $u_1, p_1, T_1$ ) strömt ein kompressibles Gas durch eine konvergent-divergente Düse in die Umgebung (Umgebungsdruck:  $p$ ) ab. In Abb. 1 ist das sich während eines Ausströmvorgangs einstellende Druckverhältnis für verschiedene Betriebszustände einer konvergent-divergenten Düse über ihrer normierten Länge aufgetragen. Welche Aussagen sind richtig?

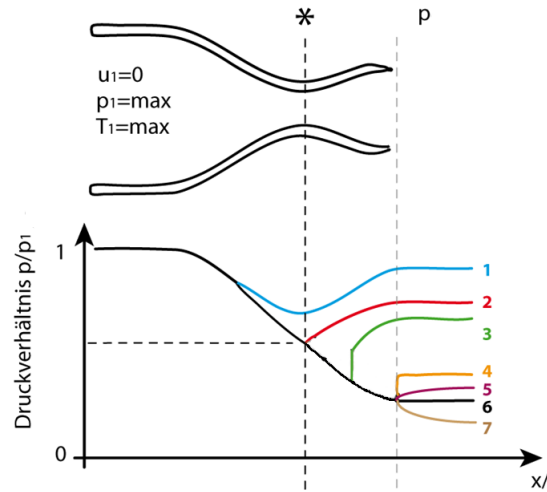


Abb. 1 Lavaldüse

- Verlauf 1 – reine Unterschallströmung in der Düse
- Verlauf 2 – Zuströmung am Eintritt mit  $Ma < 1$  und Abströmung am Austritt mit  $Ma > 1$
- Verlauf 3 – Verdichtungsstoß wandert in die Düse hinein
- Verlauf 6 – der divergente Düsenteil beschleunigt die Strömung bis zum Austritt
- Verlauf 6 – die Düse ist angepasst.

## 2. Inkompressible Strömungen

### 2.1. Vertikale Rohrleitung (13,5 Punkte)



Eine vertikale Rohrleitung wird von unten nach oben mit Wasser durchströmt ( $\dot{V}$ ). Der betrachtete Rohrleitungsabschnitt zwischen den Stellen 1 und 2 besteht aus drei geraden Rohrstücken (gesamte Länge  $L$ , Sandkornrauigkeit  $k_S$ ) und zwei Rohrkrümmern ( $\zeta_{Kr}$ ) des Durchmessers  $D_1$  sowie einer unstetigen Querschnittserweiterung von  $D_1$  auf  $D_2$ . Die Stelle 2 ist dort angeordnet, wo das Verwirbelungsgebiet nach der unstetigen Querschnittserweiterung beendet ist, die Strömung also wieder an der Rohrwand anliegt. An den Stellen 1 und 2 wurden Messleitungen installiert, die mit einem U-Rohr-Manometer verbunden sind. Als Sperrflüssigkeit im Manometer dient Quecksilber (Dichte  $\rho_{Hg}$ ), die Flüssigkeit in den Messleitungen ist Wasser (Dichte  $\rho_W$ , Viskosität  $\nu_W$ ).

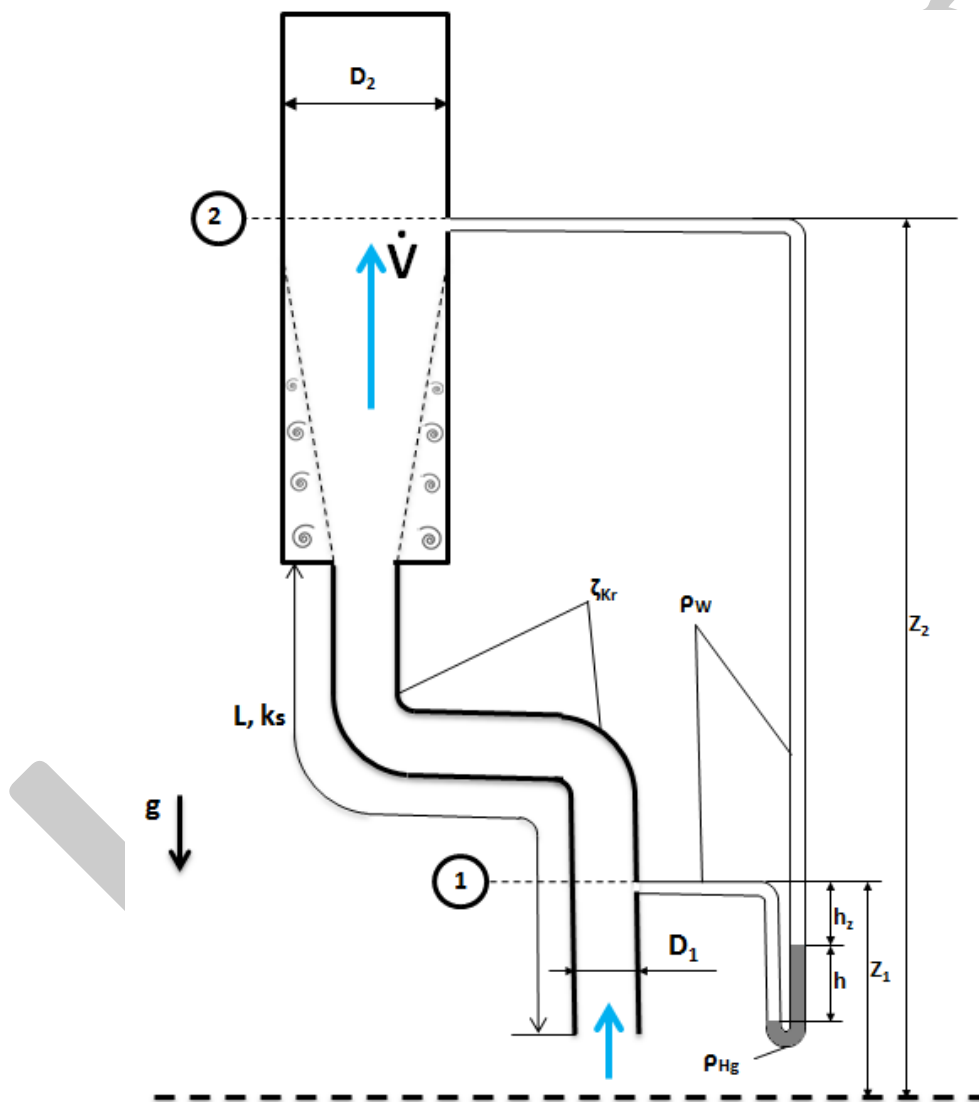


Abb. 2 Vertikale Rohrleitung

**Gegeben:**

$$D_1 = 100 \text{ mm}$$

$$D_2 = 200 \text{ mm}$$

$$\rho_W = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\zeta_{Kr} = 0,2$$

$$L = 3,0 \text{ m}$$

$$Z_2 = 4,0 \text{ m}$$

$$\rho_{Hg} = 13\,560 \text{ kg/m}^3$$

$$k_S = 0,0001 \text{ m}$$

$$Z_1 = 1,0 \text{ m}$$

$$\dot{V} = 0,0785 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\nu_W = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

**2.1a)**

Bestimmen Sie die Reynoldszahl  $Re$  der Rohrströmung im ersten Rohrabschnitt (vor der Erweiterung). Ist die Strömung turbulent oder laminar?

	Wert
$Re$	999493.04, turbulent 0.5 0.5

**2.1b)**

Bestimmen Sie die Rohrreibungszahl  $\lambda$  des Rohrsystems.

	Wert
$\lambda$	0.02 1

**2.1c)**

Bestimmen Sie die Druckdifferenz  $p_2 - p_1$ .

**Hinweis:** Der Verlust durch die unstetige Querschnittserweiterung kann bei der vorherrschenden Strömungsrichtung berechnet werden zu:  $\zeta_{V,UE} = (1 - \frac{D_1^2}{D_2^2})^2$

	Wert
$p_2 - p_1$	-60648 Pa 0.5

**2.1d)**

Bestimmen Sie die Höhe der Quecksilbersäule  $h$ .

	Wert
$h$	253 mm 0.5

**Lösung**

**2.1a)**

Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit in Abschnitt 1 oder 2 aus der Kontigleichung:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2 \\ c_1 &= 9.99 \text{ ms} \quad \textcircled{1} \end{aligned} \quad (1)$$

Berechnung der Reynoldszahl in der Rohrströmung mit:

$$\begin{aligned} Re &= \frac{c \cdot d}{\nu} \\ Re &= \frac{c_1 \cdot D_1}{\nu} \quad \textcircled{1} \\ Re &= 999493.04 \end{aligned} \quad (2)$$

**2.1b)**

Bestimmung der Rohrreibungszahl  $\lambda$  aus dem Moody-Diagramm

$$\begin{aligned} \frac{k_s}{D_1} &= 0.001 \quad \textcircled{0,5} \\ \lambda &= 0.02 \end{aligned} \quad (3)$$

**2.1c)**

Bestimmung der Druckdifferenz  $p_2 - p_1$  mit der erweiterten Bernoulli-Gleichung:

$$p_1 + \frac{\rho_W}{2} \cdot c_1^2 + \rho_W \cdot g \cdot Z_1 = p_2 + \frac{\rho_W}{2} \cdot c_2^2 + \rho_W \cdot g \cdot Z_2 + \Delta p_{v,1+2} \quad \textcircled{1} \quad (4)$$

Bestimmung des Verlustdruckes im Rohrsystem:

$$\begin{aligned} \Delta p_{v,1+2} &= \Delta p_{v,R} + 2 \cdot \Delta p_{v,Kr} + \Delta p_{v,uE} \quad \textcircled{1} \\ \Delta p_{v,1+2} &= \frac{\rho_W \cdot c_1^2}{2} \cdot (\zeta_{v,R} + 2 \cdot \zeta_{v,Kr} + \zeta_{v,uE}) \\ \Delta p_{v,1+2} &= \frac{\rho_W \cdot c_1^2}{2} \cdot \left( \lambda \cdot \frac{\sum L}{D_1} + 2 \cdot \zeta_{v,Kr} + \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)^2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &\textcircled{0,5} \quad \textcircled{0,5} \quad \textcircled{0,5} \quad \textcircled{0,5} \\ \Delta p_{v,1+2} &= 78\,125 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Umstellen der Bernoulli-Gleichung:

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho_W}{2} \cdot (c_1^2 - c_2^2) + \rho_W \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2) - \Delta p_{v,1+2}$$

$\textcircled{0,5}$   
(6)

Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit  $c_2$



$$\dot{V} = c_2 \cdot A_2$$
$$c_2 = 2.5 \text{ ms} \quad \textcircled{0.5} \quad (7)$$

Berechnen der Druckdifferenz zu:

$$p_2 - p_1 = -60648 \text{ Pa} \quad (8)$$

## 2.1d)

Bestimmung des Höhenunterschiedes aus der Hydrostatik:

$$\textcircled{1} p_1 + \rho_W \cdot g \cdot (h + h_z) = p_2 + \rho_W \cdot g \cdot ((Z_2 - Z_1) + h_z) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h \quad \textcircled{1}$$
$$h \cdot (\rho_W \cdot g - \rho_{Hg} \cdot g) = p_2 - p_1 + \rho_W \cdot g \cdot (Z_2 - Z_1)$$
$$h = \frac{(p_2 - p_1) + \rho_W \cdot g \cdot (Z_2 - Z_1)}{\rho_W \cdot g - \rho_{Hg} \cdot g} \quad \textcircled{1} \quad (9)$$
$$h = 0.253 \text{ m} = 253 \text{ mm}$$

2.2. Luftkissen (11 Punkte)



Die Skizze stellt den schematischen Aufbau eines Luftkissenfahrzeugs (Gewichtskraft  $F_G$ ) dar. Die ruhende Umgebungsluft (Druck  $p_0$ ) wird über einen Schlauch einem Gebläse zugeführt, sodass am Eintritt des Gebläses der Druck  $p_{ein}$  herrscht. Die Luft wird anschließend in eine Druckkammer mit der Fläche  $A_D$  gepumpt und entweicht am Umfang durch die Fläche  $A_{aus}$ . Am Austritt der Druckkammer herrscht der Druck  $p_d$ . Die Strömung sei inkompressibel und innerhalb der Druckkammer nicht verlustbehaftet. Die Energiezufuhr durch das Gebläse ist unbekannt und der angeschlossene Schlauch übt keine zusätzliche vertikale Kraft auf das Luftkissen aus. Die potentielle Energie von Luft wird vernachlässigt.

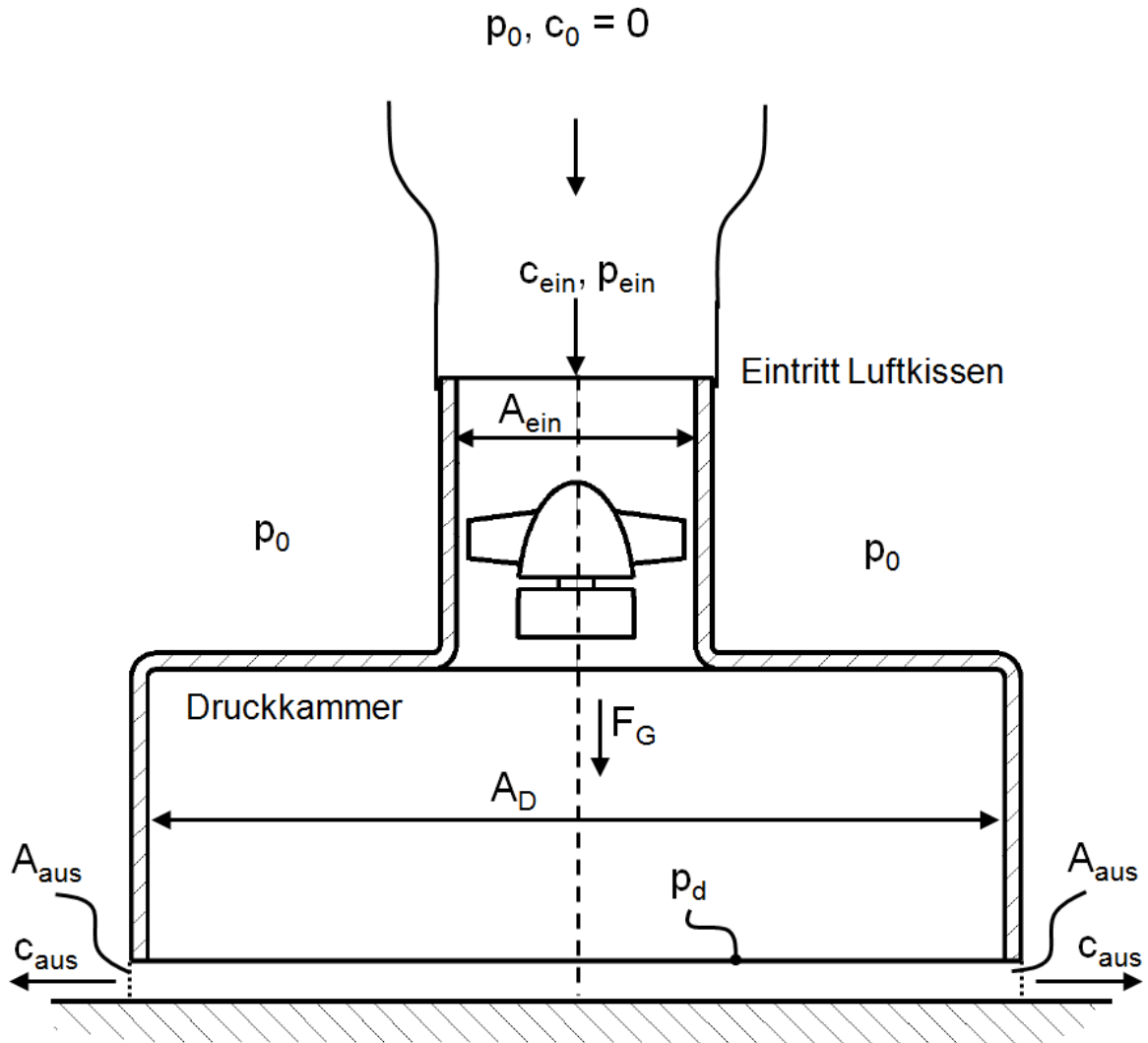


Abb. 3 Luftkissen

Gegeben:

$A_{ein}$	$A_D$	$A_{aus}$
$\rho$	$p_0$	$F_G$

Hinweis: Die Geschwindigkeit in der Druckkammer sowie jegliche Wandreibung sollen vernachlässigt werden.

**2.2a)**

Berechnen Sie den Eintrittsdruck  $p_{ein}$  am Eintritt des Luftkissens als Funktion des unbekanntes Volumenstroms

	Symbolschreibweise
$p_{ein}$	$p_0 - \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\dot{V}}{A_{ein}}\right)^2$ ①

**2.2b)**

Berechnen Sie den Druck in der Druckkammer  $p_d$  als Funktion des unbekanntes Volumenstroms .

	Symbolschreibweise
$p_d$	$p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\dot{V}}{A_{aus}}\right)^2$ ①

**2.2c)**

Berechnen Sie den Volumenstrom  $\dot{V}$ , den das Gebläse liefern muss, damit das Luftkissen im Gleichgewicht über dem Boden schwebt.

	Symbolschreibweise
$\dot{V}$	$\sqrt{\frac{2 \cdot F_G}{\rho \cdot \left(\frac{A_d}{A_{aus}} - \frac{1}{A_{ein}}\right)}}$ ①

**Lösung**

**2.2)**

Der Volumenstrom berechnet sich über:

$$\dot{V} = A_{ein} \cdot c_{ein} \quad \text{①,5} \quad (10)$$

bzw. da die Strömung inkompressibel ist.

$$\dot{V} = A_{aus} \cdot c_{aus} \quad \text{①,5} \quad (11)$$

Da  $p_{ein}$  und  $p_{aus}$  unbekannt: Bernoulli vom Ruhezustand der Umgebung zu Luftkissen-Eintritt

$$p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot c_0^2 + \rho \cdot g \cdot z_0 = p_{ein} + \frac{\rho}{2} \cdot c_{ein}^2 + \rho \cdot g \cdot z_{ein} \quad \text{①} \quad (12)$$

Mit den Annahmen:

$$c_0 = 0 \quad \text{①,5} \quad (13)$$

da Ruhezustand und weil die potentielle Energie der Luft vernachlässigt werden kann folgt

$$z_0 - z_{ein} = 0 \quad (0,5) \quad (14)$$

$$p_{ein} = p_0 - \frac{\rho}{2} \cdot c_{ein}^2 \quad (15)$$

$$p_{ein} = p_0 - \frac{\rho}{2} \cdot \left( \frac{\dot{V}}{A_{ein}} \right)^2 \quad (16)$$

Bernoulli von Ende der Druckkammer bis Austrittfläche  $A_{aus}$  für die Bestimmung von  $p_d$

$$p_d + \frac{\rho}{2} \cdot c_d^2 + \rho \cdot g \cdot z_d = p_{aus} + \frac{\rho}{2} \cdot c_{aus}^2 + \rho \cdot g \cdot z_{aus} \quad (1)$$

Mit den Annahmen:

$$c_d = 0 \quad (0,5) \quad (18)$$

da Geschwindigkeit in der Druckkammer vernachlässigt wird

$$z_0 - z_{aus} = 0 \quad (0,5) \quad (19)$$

da die potentielle Energie von Luft vernachlässigt wird

$$p_d = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot c_{aus}^2 \quad (20)$$

$$p_d = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot \left( \frac{\dot{V}}{A_{aus}} \right)^2 \quad (21)$$

Damit das Luftkissen in der Schwebel bleibt muss die Summe aller Kräfte in vertikaler Richtung sich aufheben.

$$\sum F_y = 0 = F_{p,d} - F_{p,ein} - F_{p,0} - F_{l,ein} - F_G \quad (1)$$

Mit

$$F_{p,d} = p_d \cdot A_D \quad (0,5) \quad (23)$$

$$F_{p,ein} = p_{ein} \cdot A_{ein} \quad (0,5) \quad (24)$$

$$F_{p,0} = p_0 \cdot (A_D - A_{ein}) \quad (0,5) \quad (25)$$

$$F_{l,ein} = \rho \cdot A_{ein} \cdot c_{ein}^2 \quad (0,5) \quad (26)$$

Die Impulskräfte am Austritt spielen für die vertikale Kräftebilanz keine Rolle.

Die in a) und b) in Abhängigkeit des Volumenstroms berechneten Drücke in die Kräftebilanz eingesetzt ergibt.

$$0 = \frac{\rho \cdot \dot{V}^2}{2} \left( \frac{A_d}{A_{aus}^2} - \frac{1}{A_{ein}} - F_G \right) \quad (27)$$

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{2 \cdot F_G}{\rho \left( \frac{A_d}{A_{aus}^2} - \frac{1}{A_{ein}} \right)}} \quad (28)$$

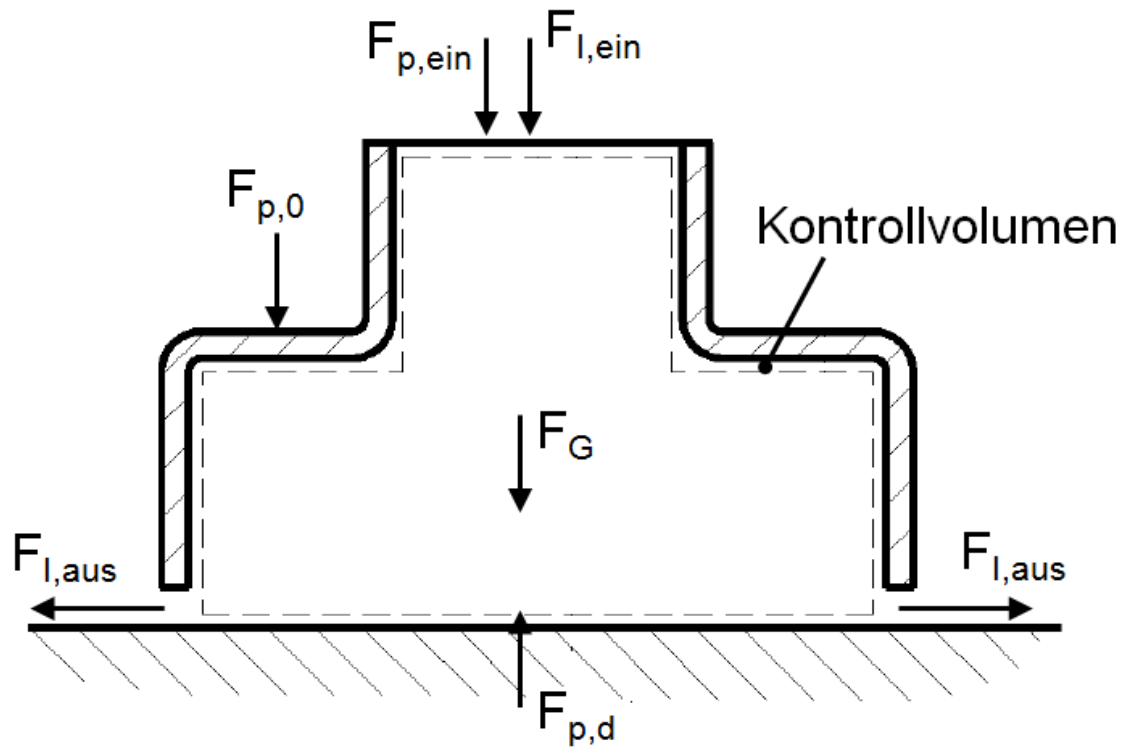


Abb. 4 Luftkissen

### 3. Kompressible Strömungen

**3.1. Ausströmen aus einem Druckbehälter (17 Punkte)**

Aus einem großen Behälter strömt Luft durch ein rechteckiges Rohr mit dem Querschnitt  $b \cdot H$ , in welches eine angespitzte, ebene Platte mit dem Querschnitt  $b \cdot (H/2)$  hineinragt, in die Atmosphäre aus. Die Plattenhalterung ist weit entfernt vom Punkt (2). Die Strömung ist als ideales Gas zu betrachten. Des Weiteren sei die Strömung zwischen (0) und (2) isentrop und kompressibel. Der Atmosphärendruck beträgt 1 bar.

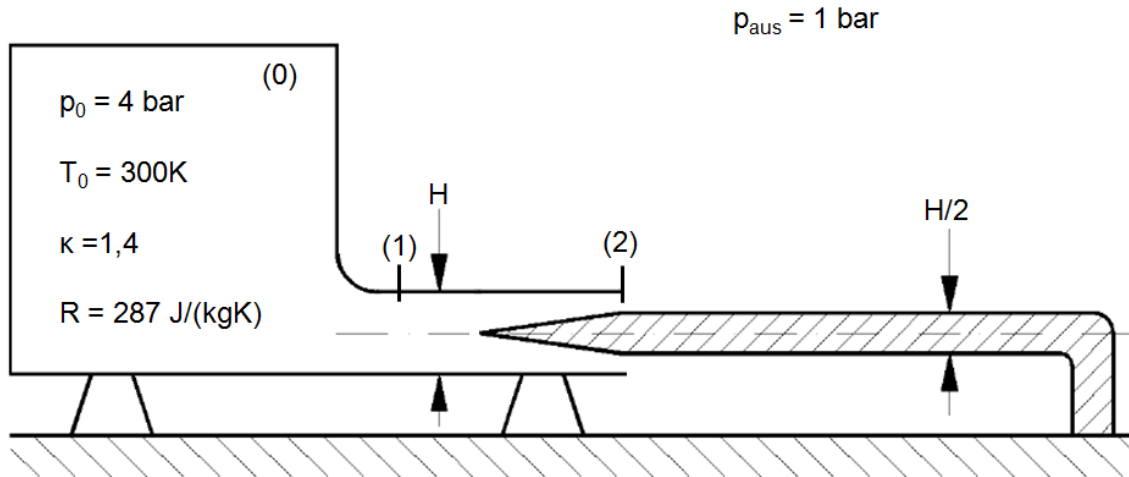


Abb. 5 Druckbehälter mit eingebrachter spitzer, ebener Platte

Gegeben:

$p_0 = 4 \text{ bar}$	$p_{\text{amb}} = 1 \text{ bar}$	$T_0 = 300 \text{ K}$
$R = 287 \text{ J/(kgK)}$	$Ma_1 = 0,306$	$H = 5 \text{ mm}$
$\kappa = 1,4$	$b = 10 \text{ mm}$	

**3.1a)**

Bestimmen Sie das kritische Druckverhältnis und geben Sie an, ob das Druckverhältnis unter- oder überkritisch ist?

	Symbolschreibweise	Wert
$\frac{p_{\text{amb}}}{p_0}$	überkritisch <span style="color: orange; font-weight: bold;">1</span>	$0,25 < 0,528$ <span style="color: orange; font-weight: bold; border: 1px solid orange; border-radius: 50%; padding: 2px;">0.5</span>

**3.1b)**

Berechnen Sie die Geschwindigkeit und den Druck an der Stelle (2).

	Symbolschreibweise	Wert
$c_2$	$\sqrt{\frac{2 \cdot \kappa \cdot R T_0}{\kappa + 1}}$ <span style="color: orange; font-weight: bold;">1</span>	317 m/s <span style="color: orange; font-weight: bold; border: 1px solid orange; border-radius: 50%; padding: 2px;">0.5</span>

	Symbolschreibweise	Wert
$p_2$	$p_0 \cdot \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$ ①	211 312 Pa ①.5

**3.1c)**

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und Druck an der Stelle (1).

	Symbolschreibweise	Wert
$p_1$	$\frac{p_0}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot Ma_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$ ①	374 849 Pa ①.5

	Symbolschreibweise	Wert
$c_1$	$Ma_1 \cdot \sqrt{\frac{\kappa \cdot R \cdot T_0}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot Ma_1^2}}$ ①	105.25 m/s ①.5

**3.1d)**

Bestimmen Sie die horizontale Kraft, die die Strömung auf die Platte ausübt. Hinweis: Für die Symbolschreibweise müssen die Dichten nicht vollständig ausgeschrieben werden.

	Symbolschreibweise	Wert
$F$	$\frac{b \cdot H}{2} \cdot (2 \cdot p_1 - p_2 + 2 \cdot \rho_1 \cdot c_1^2 - \rho_2 \cdot c_2^2)$ ①	8.53 N ①.5

**Lösung**

**3.1a)**

Bestimmen des kritischen Druckverhältnisses:

$$\left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right)^* = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0,528 \quad (0,5) \quad (29)$$

Vorliegendes Druckverhältnis:

$$\left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right) = \frac{1}{4} = 0,25 \quad (30)$$

Es liegt eine überkritische Strömung vor → im engsten Querschnitt gilt  $Ma = 1$ .

**3.1b)**

Bestimmen der Geschwindigkeit an der Stelle (2). Da eine überkritische Strömung vorliegt, liegt an der Stelle (2)  $Ma = 1$  vor (engster Querschnitt). Daraus folgt:

$$a_2 = c_2 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_2} \quad (1) \quad (31)$$

mit  $T_2$

$$T_2 = T_0 \cdot \left(\frac{2}{\kappa+1}\right) = 250K \quad (0,5) \quad (32)$$

$$a_2 = c_2 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_2} = 317 \frac{m}{s} \quad (33)$$

Der Druck  $p_2$  wird über das kritische Druckverhältnis bestimmt. Da an der Stelle der engste Querschnitt vorliegt und somit dort das kritische Druckverhältnis vorliegt, folgt:

$$p_2 = p_0 \cdot \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (0,5) \quad (34)$$

$$p_2 = 211312Pa \quad (35)$$

**3.1c)**

Bestimmen des Drucks an der Stelle (1). Mit  $Ma_1 = 0,306$  folgt über:

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot Ma_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (0,5) \quad (36)$$

$$p_1 = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot Ma_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad (37)$$

$$p_1 = 374849Pa \quad (38)$$

Für die Berechnung der Geschwindigkeit an der Stelle (1) wird zunächst die Temperatur  $T_1$  berechnet.

$$T_1 = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot Ma_1^2\right)} = 294,485K \quad (0,5) \quad (39)$$

$$a_1 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1} = 343,98 \frac{m}{s} \quad (0,5) \quad (40)$$



$$c_1 = Ma_1 \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1} = 105,25 \frac{m}{s} \quad (41)$$

3.1d)

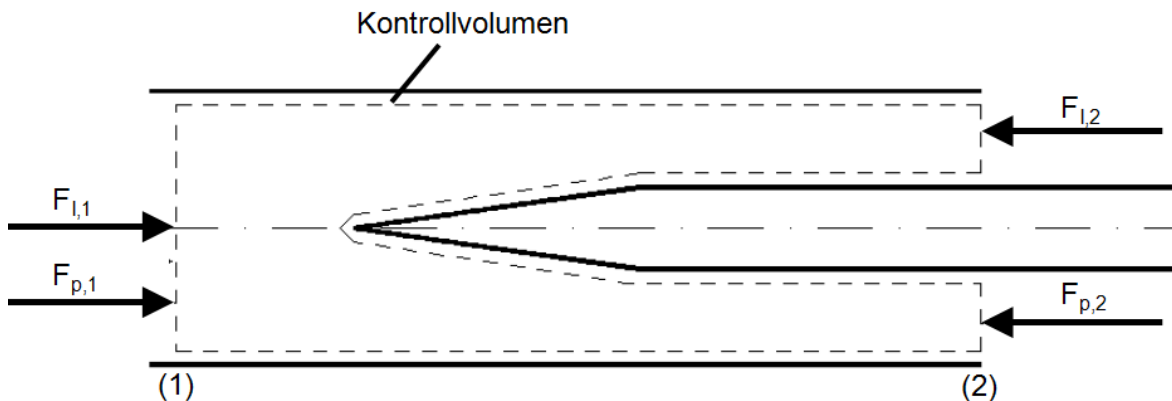


Abb. 6 Kräftebilanz auf Platte

Zur Bestimmung der Kraft, die durch die Strömung auf die Platte ausübt wird eine Kräftebilanz auf das skizzierte Kontrollvolumen durchgeführt.

$$\sum F_x = 0 = F_{p,1} - F_{p,2} + F_{I,1} - F_{I,2} - F \quad \text{① equation}$$

$$\sum F_x = 0 = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 + \rho_1 \cdot A_1 \cdot c_1^2 - \rho_2 \cdot A_2 \cdot c_2^2 - F \quad \text{④ equations}$$

Bestimmung der unbekannt Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R \cdot T_1} = 4,434 \frac{kg}{m^3} \quad \text{⑤ equation}$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R \cdot T_2} = 2,94 \frac{kg}{m^3} \quad \text{⑤ equation}$$

$$A_1 = b \cdot H \quad (42)$$

$$A_2 = \frac{b \cdot H}{2} \quad (42)$$

Daraus folgt:

$$F = \frac{b \cdot H}{2} \cdot (2 \cdot p_1 - p_2 + 2 \cdot \rho_1 \cdot c_1^2 - \rho_2 \cdot c_2^2) = 8,53N \quad (42)$$

## Formelsammlung

### Viskosität

$$\eta = \nu \rho \quad (6.11)$$

mit  $\eta$  : dynamische Viskosität, [Ns/m<sup>2</sup>]

$\nu$  : kinematische Viskosität, [m<sup>2</sup>/s]

$\rho$  : Dichte, [kg/m<sup>3</sup>]

Newtonsches Fluid:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (6.12)$$

mit  $\tau$  : Scherspannung, [N/m<sup>2</sup>]

$u$  : Strömungsgeschwindigkeit, [m/s]

$y$  : Koordinate senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit, [m]

### Oberflächenspannung und Kapillarität

Drucksprung  $\Delta p$  in der Phasengrenzfläche eines kugelförmigen Tropfens mit dem Radius  $r$ :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad ; \quad \text{mit } \sigma : \text{Oberflächenspannung, [N/m]} \quad (6.13)$$

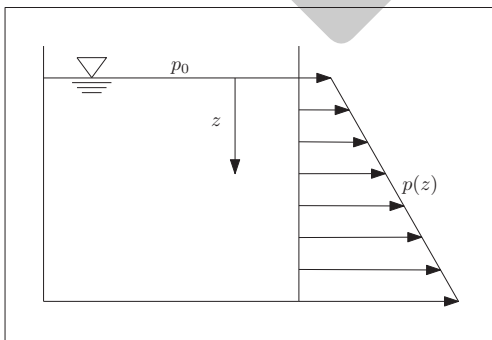
Steighöhe  $h$  bei Kapillaren mit kreisförmigem Querschnitt:

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r} \quad ; \quad \text{mit } \alpha : \text{Randwinkel} \quad (6.14)$$

### Hydrostatik

Hydrostatischer Druck:

$$p(z) = p_0 + \rho g z \quad (6.15)$$



Hydrostatischer Auftrieb:

$$F_A = \rho g V \quad ; \quad \text{mit } V : \text{Volumen der verdrängten Flüssigkeit} \quad (6.16)$$

## Hydrodynamik

### Massenbilanz

$$\frac{dm_{KV}}{dt} = \iiint \rho \vec{n} \cdot \vec{c} \, dA \quad (6.17)$$

mit  $\vec{n}$  : Normalvektor  
 KV : beliebiges Kontrollvolumen

### Impulssatz

$$\iint \rho \vec{c} \vec{n} \cdot \vec{c} \, dA = - \iint p \vec{n} \, dA + \iiint \rho \vec{g} \, dV + \vec{F}_R + \vec{F}_{12} \quad (6.18)$$

mit  $\vec{F}_R$  : Reibungskraft  
 $\vec{F}_{12}$  : Haltekraft/Interaktion mit Wänden

### Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2} \rho c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad (6.19)$$

Erweiterung für verlustbehaftete Strömungen mit Energiezufuhr:

$$\frac{1}{2} \rho c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 + \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{V}} = \frac{1}{2} \rho c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{12} \quad (6.20)$$

mit  $\dot{W}_{12} > 0$  : zwischen Position 1 und 2 zugeführte Leistung, [Nms<sup>-1</sup>]  
 $\dot{V}$  : Volumenstrom, [m<sup>3</sup>/s]  
 $\Delta p_{12}$  : Druckverlust zwischen Position 1 und 2, [Pa]

Druckverlust in Rohrströmungen:

$$\Delta p_{12} = \sum_k \frac{1}{2} \rho c_k^2 \lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2} \rho c_i^2 \xi_i \quad (6.21)$$

mit  $\lambda_k$  : Rohrreibungszahl  
 $l_k$  : Länge des Rohrabschnitts  $k$   
 $d_k$  : Durchmesser des Rohrabschnitts  $k$   
 $\xi_i$  : weitere Verlustbeiwerte des Rohrabschnitts  $i$

### Impulsmomentensatz

$$(\rho_2 c_2^2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2} + p_2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2}) - (\rho_1 c_1^2 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1} + p_1 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1}) = \sum \vec{M}_{12} \quad (6.22)$$

mit  $\sum \vec{M}_{12}$  : Summe der äußeren, an der Oberfläche der Kontrollraumes angreifenden Momente  
 $\vec{e}_t$  : Einheitsvektor, in Strömungsrichtung zeigend

Euler'sche Turbinengleichung:

$$M_{12} = \dot{m}(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}) \quad (6.23)$$

mit  $c_u$  : Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung  
 $r$  : Hebelarm

**Energiebilanz**

$$\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + g z_2\right) - \left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + g z_1\right) = q_{12} \quad (6.24)$$

mit  $u$  : spez. innere Energie, [J/kg]

$q_{12} = \dot{Q}/\dot{m}$  : zwischen Position 1 und 2 zugeführte spezifische Wärmemenge, [J/kg]

**Interne Strömungen****Laminare Rohrströmung**

Geschwindigkeitsprofil:

$$c(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = c_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad (6.25)$$

mit  $\Delta p$  : Druckunterschied zwischen zwei im Abstand  $l$  auf den Stromfaden liegenden Punkten

$l$  : Länge des Rohrabschnittes über dem der Druckunterschied  $\Delta p$  auftritt

Volumenstrom:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l} \quad (\text{Gesetz von Hagen-Poiseuille}) \quad (6.26)$$

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho c_m^2 \lambda \frac{l}{d} \quad (6.27)$$

mit  $c_m$  : über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

$\lambda$  : Rohrreibungszahl

Die Rohrreibungszahl für laminare Strömungen ist

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (6.28)$$

mit der Reynolds-Zahl:

$$Re = \frac{c_m d}{\nu} \quad (6.29)$$

**Turbulente Rohrströmung**

Geschwindigkeitsprofil:

$$\frac{\bar{c}(r)}{\bar{c}_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}, \quad Re \leq 10^5 \quad (6.30)$$

Dieses 1/7-Potenzgesetz gilt nicht in Wandnähe.

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \bar{c}_m^2 \lambda \frac{l}{d} \quad (6.31)$$

mit  $\bar{c}_m$  : zeitliche und über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

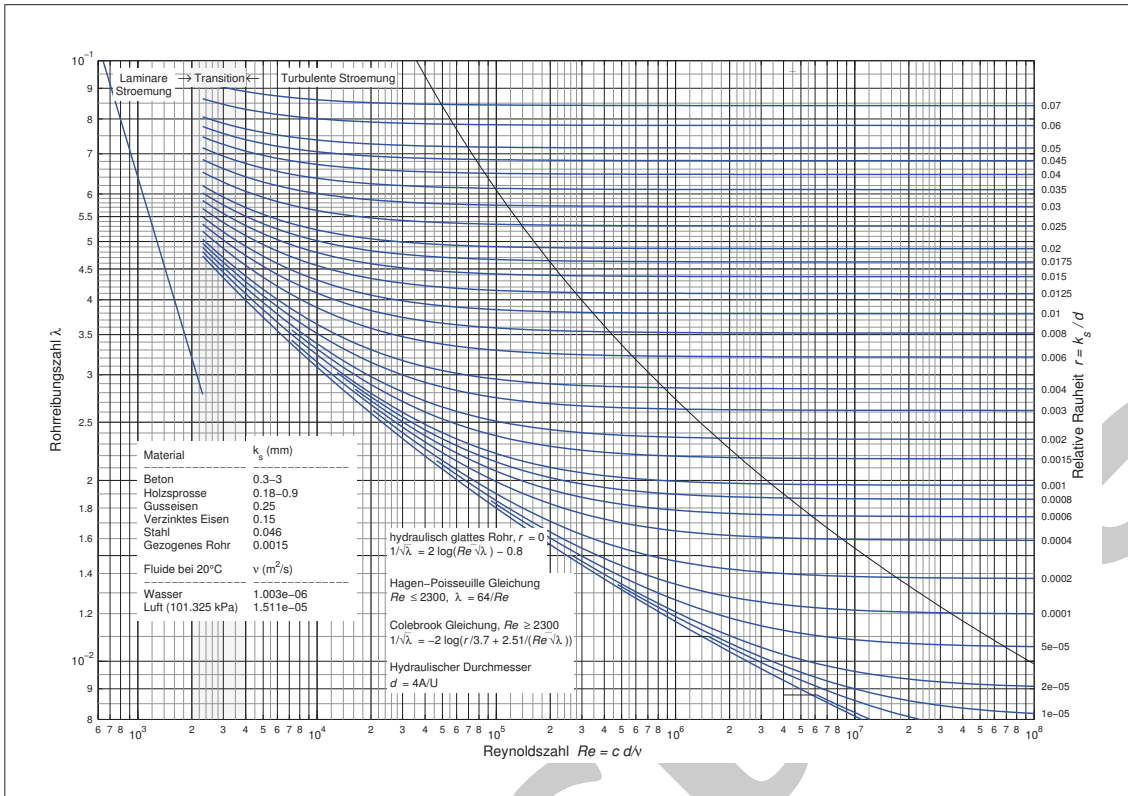
Die Rohrreibungszahl für hydraulisch glatte Rohre:

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} \quad \text{für } Re \leq 10^5 \quad (\text{Blasius}) \quad (6.32)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad \text{für } 10^5 \leq Re \leq 3 \cdot 10^6 \quad (\text{Prandtl}) \quad (6.33)$$

### Moody-Diagramm

Das Moody-Diagramm stellt die Rohrreibungszahl  $\lambda$  in Abhängigkeit der Reynoldszahl  $Re$  (laminare und turbulente Strömungen) und der äquivalenten Sandkornrauigkeit  $k_s$  für technisch raue Rohre dar.



### Externe Strömungen

#### Grenzschicht an einer ebenen Platte

Grenzschichtdicke (laminar):

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}} \tag{6.34}$$

Reynoldszahl bezogen auf die Lauflänge:

$$Re_x = \frac{c_\infty x}{\nu} \tag{6.35}$$

mit  $c_\infty$  : Anströmgeschwindigkeit parallel zur Plattenoberfläche  
 $x$  : überströmte Länge, Beginn: Plattenvorderkante

Laminar-turbulenter Umschlag:

$$Re_{x_{krit}} = \frac{c_\infty x_{krit}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5 \tag{6.36}$$

### Strömungswiderstand

Gesamtwiderstand

$$F_W = F_{w,\tau} + F_{w,p} = c_w \frac{\rho}{2} c_\infty^2 A \tag{6.37}$$

mit  $F_{w,\tau}$  : Widerstandskraft infolge der Reibung  
 $F_{w,p}$  : Widerstandskraft infolge der Druckdifferenz  
 $c_w$  : Widerstandskoeffizient  
 $A$  : angeströmte oder umströmte Fläche

Reibungswiderstand einer ebenen Platte:

$$c_{w,\tau} = \begin{cases} \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}} & \text{lam. Grenzschicht} \\ \frac{0,074}{Re_l^{1/5}} & \text{turb. Grenzschicht} \end{cases} \quad (6.38)$$

mit  $Re_l : \frac{c_\infty l}{\nu}$

## Ausströmvorgänge

Ausströmgeschwindigkeit für *inkompressibles* Fluid ( $c_{innen} = c_0 = 0$ ):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p_{aus}) + 2gh} \quad (6.39)$$

Ausströmgeschwindigkeit für *kompressibles* Fluid ( $c_{in} = 0$ ):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_0 \left( 1 - \left( \frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} \quad (6.40)$$

Massenstrom:

$$\dot{m} = A_{aus} c_{aus} \rho_{aus} = A_{aus} \sqrt{2p_0 \rho_0} \psi \quad (6.41)$$

mit Ausflußfunktion:

$$\psi = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1} \left( \left( \frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left( \frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right)} \quad (6.42)$$

Kritisches Druckverhältnis:

$$\left( \frac{p_{aus}}{p_0} \right)^* = \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (6.43)$$

## Gasdynamik

Thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad ; \quad \text{mit } R : \text{Gaskonstante, [J/(kg K)] und } T : \text{Temperatur, [K]} \quad (6.44)$$

Isentropenbeziehung:

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \quad ; \quad \text{mit } \kappa = \frac{c_p}{c_v} : \text{Isentropenexponent} \quad (6.45)$$

$$R = c_p - c_v = \frac{\kappa-1}{\kappa} c_p \quad (6.46)$$

Spezifische Enthalpie:

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad \text{mit } u : \text{ spez. innere Energie, [J/kg]} \quad (6.47)$$

Schallgeschwindigkeit:

$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad (6.48)$$

Mach-Zahl:

$$Ma = c/a \quad (6.49)$$

Zustandsänderung aus dem Ruhezustand ( $X_0$ ) für ein ideales Gas bei isentroper, verlustfreier, stationärer Strömung:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \quad (6.50)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.51)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.52)$$

Zustandsänderung für den kritischen Zustand ( $X^*$ ) eines idealen Gas in einer isentropen, verlustfreien, stationären Strömung:

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (6.53)$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.54)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.55)$$

Für die Strömungen zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 auf dem Stromfaden gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2) \right) \quad (6.56)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2) \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.57)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2) \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.58)$$