

# Klausur

## Strömungsmechanik 1

### Frühjahr 2018

08. März 2018, Beginn 16:00 Uhr

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- Mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

#### Weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Aufgabe	Punkte
1. Verständnisfragen	10
2. Inkompressible Strömungen	28
3. Kompressible Strömungen	13,5
Gesamt	51,5

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

***Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!***

**Prof. Dr.-Ing. J. Seume  
T. Hauptmann, S. Lehnhoff, F. Schwarzbach**

# 1. Verständnisfragen (10 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.  
(Nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet.)

## 1.1. Fluideigenschaften

(1)

Der Druck in einem Fluid wirkt stets

- ...aufwärts.
- ...abwärts.
- ...in Strömungsrichtung.
- ...in alle Richtungen.

## 1.2. Strömungsvisualisierung

(1)

Welche Aussagen sind richtig?

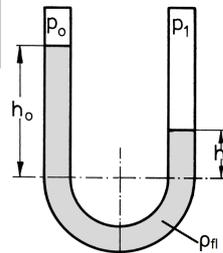
- Stromröhren sind normal zur Strömungsrichtung massendicht.
- Stromröhren sind durch Stromlinien begrenzt.
- Stromröhren weisen stets einen kreisförmigen Querschnitt auf.

## 1.3. Höhendifferenz U-Rohr-Manometer

(2)

Berechnen Sie die Höhendifferenz  $h_0 - h_1$ , die sich im gezeigten U-Rohr-Manometer einstellt, wenn auf den beiden Schenkeln die Drücke  $p_0$  und  $p_1$  lasten. Das System wird durch die folgenden Größen

$$p_1 = 102\,700\text{ Pa} \quad p_0 = 100\,000\text{ Pa}$$
$$g = 9.81\text{ m/s}^2 \quad \rho_{fl} = 1030\text{ kg/m}^3$$



beschrieben. Welche Aussagen sind richtig?

- $h_0 - h_1 = 26.7 \times 10^{-2}\text{ m}$
- $h_0 - h_1 = 7.38\text{ m}$
- $h_0 - h_1 = 13.36 \times 10^{-2}\text{ m}$
- $h_0 - h_1 = 2.14\text{ m}$

1.4. Hydrodynamik

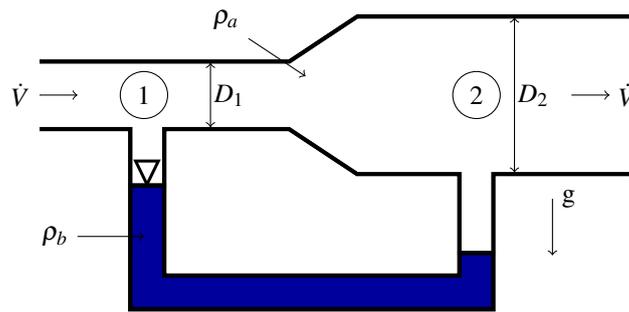
(2)

Geben Sie „>“, „<“ oder „=“ an.

$u_1$    $u_2$

$p_1$    $p_2$

$\rho_a$    $\rho_b$



1.5. Moody-Diagramm

(1)

Welche der Aussagen stimmen für eine Rohrströmung mit

Mittlere Geschwindigkeit  $\bar{c}_m = 120 \text{ m/s}$ ; Radius  $r = 10 \text{ mm}$ ; Kinematische Viskosität  $\nu = 1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ; Sandkornrauheit  $k_s = 1.6 \times 10^{-4} \text{ m}$

- Die Strömung ist laminar.
- Die Strömung ist turbulent.
- Das Rohr ist als hydraulisch glatt anzusehen.
- Das Rohr ist als hydraulisch rau anzusehen.

1.6. Reynoldszahl

(1)

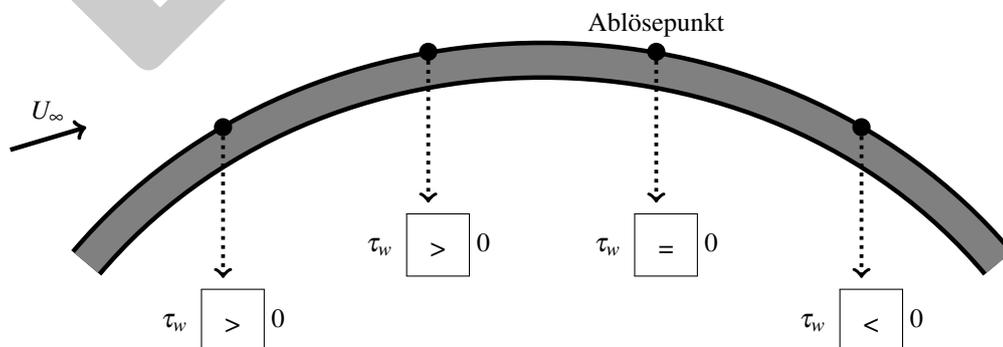
Welche der Aussage über die Reynoldszahl stimmt?

- $Re \propto \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}$
- Ist die Re-Zahl größer als die kritische Reynoldszahl, ist die Strömung laminar.
- Wenn die Re-Zahl gegen unendlich geht, können Reibungseffekte vernachlässigt werden.

1.7. Ablösung

(1)

Gegeben ist eine laminare Strömung über eine gekrümmte Oberfläche. Füllen Sie aus <, >, =.



1.8. Lavaldüse

(1)

Ordnen Sie die Geschwindigkeitsverläufe den entsprechenden Lavaldüsen A bis D zu.

A		B	
C		D	
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">A</div>		<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">D</div>	
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">B</div>		<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">C</div>	

## 2. Inkompressible Strömungen

### 2.1. Wasserleitung (13 Punkte)



Eine Pumpe fördert Wasser durch eine Rohrleitung mit hohen Druckverlusten in den einzelnen Rohrabschnitten. An der Stelle (1) strömt Wasser mit dem Druck  $p_1$  und dem Volumenstrom  $\dot{V}_1$  aus der Pumpe durch einen sich verengenden Rohrquerschnitt bis zur Stelle (2) mit dem Durchmesser  $D_2$  und erfährt dabei den Druckverlust  $\xi_{EL}$ . Von der Stelle (2) fließt das Wasser durch ein Rohr mit konstantem Durchmesser  $D_2$  entlang der Rohrlänge  $H_2$  bis zur Stelle (3). Der Rohrabschnitt besitzt eine unbekannte Rohrreibungszahl  $\lambda$ . Nach der Stelle (3) wird das Wasser durch einen Krümmer mit dem Druckverlust  $\xi_k$  umgelenkt, bis Stelle (4) erreicht wird. Von der Stelle (4) fließt das Wasser durch ein Rohr mit konstantem Durchmesser entlang der Rohrlänge  $L$  bis zur Stelle (5). Dieser Rohrabschnitt besitzt die gleiche unbekannte Rohrreibungszahl  $\lambda$ . Nach der Stelle (5) wird das Wasser durch einen Krümmer mit dem Druckverlust  $\xi_k$  umgelenkt, bis Stelle (6) erreicht wird und das Wasser aus dem Rohrsystem heraus strömt. Die Strömung wird als inkompressibel und stationär angenommen.

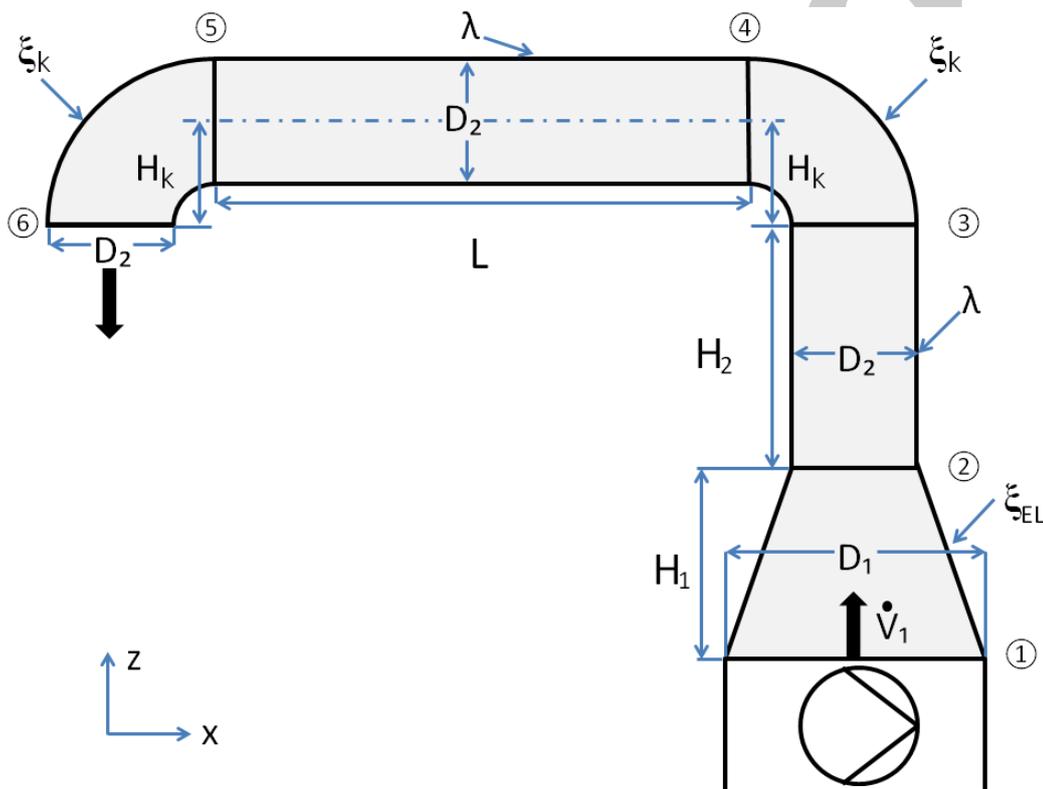


Abb. 1 Wasserleitung

**Gegeben:**

$D_1 = 10 \text{ mm}$   
 $\dot{V}_1 = 6 \text{ l/min}$   
 $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$   
 $H_1 = 12 \text{ mm}$   
 $H_k = 5 \text{ mm}$

$D_2 = 7,5 \text{ mm}$   
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$   
 $\xi_k = 0,4$   
 $H_2 = 16 \text{ mm}$

$\xi_{EL} = 0,04$   
 $L = 35 \text{ mm}$   
 $p_1 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$   
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Berechnung des Druckverlustes aus dem sich linear verengenden Einlauf:

$$\Delta p_{EL} = \frac{\rho}{2} \xi_{EL} \left( \frac{c_1 + c_2}{2} \right)^2 \quad (1)$$

**2.1a)**

Bestimmen Sie die Einströmgeschwindigkeit  $c_1$ .

	Wert
$c_1$	1,27 m/s <span style="float: right;">0,5</span>

**2.1b)**

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $c_2$ .

	Wert
$c_2$	2,25 m/s <span style="float: right;">0,5</span>

**2.1c)**

Bestimmen Sie die Reynoldszahl  $Re_2$  der Rohrströmung im zweiten Rohrabschnitt (nach der Querschnittsverengung). Ist die Strömung turbulent oder laminar?

	Wert
$Re_2$	16875 <span style="float: right;">0,5</span>
Strömungszustand	turbulent <span style="float: right;">0,5</span>

**2.1d)**

Bestimmen Sie die Rohrreibungszahl  $\lambda$  der beiden hydraulisch glatten Rohrabschnitte. Wählen Sie dafür eine Gleichung, die zu der Reynoldszahl passt, die Sie zuvor berechnet haben.

	Wert
$\lambda$	0,02772 <span style="float: right;">0,5</span>

**2.1e)**

Bestimmen Sie die Druckdifferenz  $p_1 - p_6$ .

	Wert
$p_1 - p_6$	4.563,6 Pa <span style="float: right; border: 1px solid orange; border-radius: 50%; padding: 2px;">0,5</span>

**Lösung**

**2.1a)**

Bestimmen Sie die Einströmgeschwindigkeit  $c_1$ :

$$c = \frac{\dot{V}}{A} \quad \text{①} \quad (2)$$

$$c_1 = \frac{\dot{V}_1}{0,25 \cdot D_1^2 \cdot \pi} = 1,27 \text{ m/s} \quad (3)$$

**2.1b)**

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $c_2$ :

$$\rho = \text{const.} \quad \text{①} \quad (4)$$

Aufstellung der Kontinuitätsgleichung

$$c_2 \cdot A_2 = c_1 \cdot A_1 \quad \text{①} \quad (5)$$

$$c_2 = \frac{c_1 \cdot 0,25 \cdot D_1^2 \cdot \pi}{0,25 \cdot D_{23}^2 \cdot \pi} = 2,25 \text{ m/s} \quad (6)$$

**2.1c)**

Bestimmen Sie die Reynoldszahl  $Re_2$  im zweiten Rohrquerschnitt und schätzen Sie ab, ob die Strömung laminar oder turbulent ist.

$$Re = \frac{c \cdot D}{\nu} \quad \text{①} \quad (7)$$

$$Re = \frac{c_2 \cdot D_2}{\nu} = 16875 \quad (8)$$

$$Re > 2300 \quad \text{①}$$

turbulente Strömung

## 2.1d)

Bestimmung der Rohrreibungszahl  $\lambda$

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \quad \textcircled{1} \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{0,3164}{16875^{0,25}} = 0,0277 \quad (10)$$

## 2.1e)

Bestimmung der Druckdifferenz  $p_1 - p_6$  mit der erweiterten Bernoulli-Gleichung.

Bernoulli von (1) - (6):

$$c_2 = c_6 \quad \textcircled{0,5} \quad (11)$$

$$\frac{\rho c_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho c_6^2}{2} + p_6 + \rho g z_6 + \Delta p_{v1,6} \quad \textcircled{1} \quad (12)$$

$$z_1 = 0 \quad \textcircled{0,5} \quad (13)$$

$$z_2 = H_1 + H_2 \quad \textcircled{0,5} \quad (14)$$

Berechnung von  $\Delta p_{v1,6}$

$$\Delta p_{v1,6} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{c_1 + c_2}{2} \right)^2 \xi_{EL} + \frac{\rho}{2} c_2^2 \lambda \frac{H_2}{D_2} + \frac{\rho}{2} c_2^2 \xi_k + \frac{\rho}{2} c_2^2 \lambda \frac{L}{D_2} + \frac{\rho}{2} c_2^2 \xi_k \quad (15)$$

$$\Delta p_{v1,6} = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{c_1 + c_2}{2} \right)^2 \xi_{EL} + c_2^2 \left( \lambda \frac{H_2 + L}{D_2} + 2\xi_k \right) \right] = 2564,1 \text{ Pa} \quad \textcircled{0,5} \quad (16)$$

Einsetzen in die Bernoulli-Gleichung:

$$p_1 - p_6 = \frac{\rho}{2} (c_6^2 - c_1^2) + \rho g (H_1 + H_2) + \Delta p_{v1,6} = 4.563,6 \text{ Pa} \quad (17)$$



**2.2. Freistrah (15 Punkte)**

An der Stelle (1) strömt Luft in einen Kanal (Querschnitt  $A_1$ ) ein. 15% des einströmenden Massenstroms werden an der Stelle (3) über  $A_3$  in die Atmosphäre ausgeblasen (Umgebungsdruck  $p_0$ ). An der Stelle (2) sind die Stromlinien wieder parallel. Es wird eine verlustfreie, stationäre Strömung angenommen. Eine Ablösung ist in diesem Fall nicht zu erwarten. Dichteänderungen werden ebenfalls vernachlässigt. Zusätzlich wirkt auf die Innenwand des durchströmten Rohres durch die Wand eine Kraft  $F_W$  auf das strömende Fluid. Ermitteln Sie die den horizontalen Anteil dieser Wandkraft.

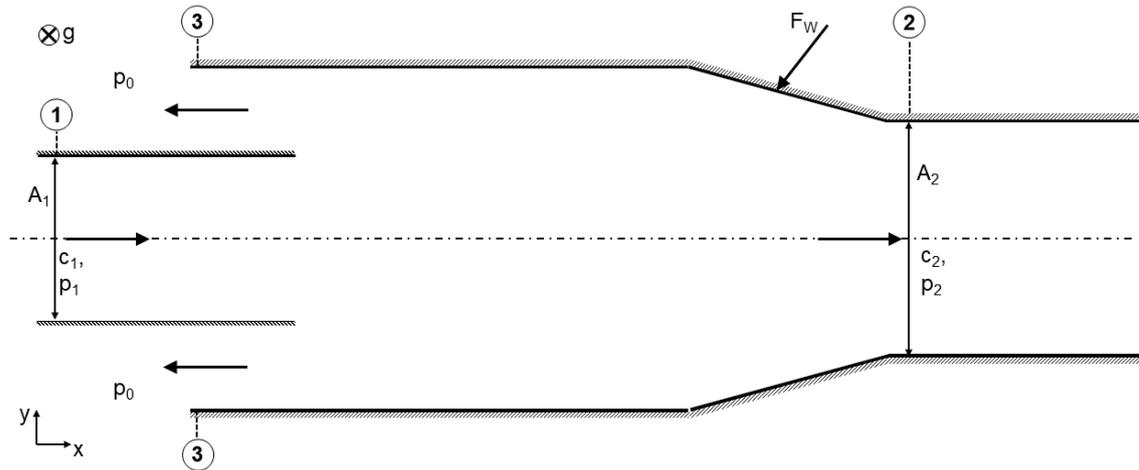


Abb. 2 Freistrah

**Gegeben:**

$$A_1 = 0,04m^2$$

$$\rho = 1,15kg/m^3$$

$$A_2 = 0,07m^2$$

$$p_1 = 100100Pa$$

$$c_1 = 20m/s$$

$$p_0 = 100000Pa$$

**2.2a)**

Wie groß ist der Druck  $p_2$  an der Stelle (2)?

	Symbolschreibweise	Wert
$p_2$	$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \left(1 - \left(0,85 \cdot \frac{A_1}{A_2}\right)^2\right)$ <p style="text-align: center;">①</p>	100275,7 Pa <span style="float: right; border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px;">0.5</span>

**2.2b)**

Bestimmen Sie die Austrittsfläche  $A_3$ .

	Symbolschreibweise	Wert
$A_3$	$\frac{0,15 \cdot A_1}{\sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_0)}{\rho c_1^2} + 1}}$ ①	0.005 m <sup>2</sup> ①

### 2.2c)

Bestimmen Sie den horizontalen Anteil der Wandkraft  $F_{Wx}$  unter Berücksichtigung von allen zuvor getroffenen Annahmen.

	Symbolschreibweise	Wert
$F_{Wx}$	$p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 + p_0 \cdot A_3 + \rho \cdot c_1^2 \left( A_1 - 0,85^2 \cdot \frac{A_1^2}{A_2} - 0,15^2 \cdot \frac{A_1^2}{A_3} \right)$ ①	2508 N ①

## Lösung

### 2.2a)

Wie groß ist der Druck  $p_2$  an der Stelle (2)?

Der Druck  $p_2$  an der Stelle (2) wird mit der Bernoulli-Gleichung von 1->2 bestimmt.

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 \quad \text{①,5a} \quad (18)$$

mit

$$z_1 = z_2 \quad \text{①,5b} \quad (19)$$

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot (c_1^2 - c_2^2) \quad \text{①,5c} \quad (20)$$

Da nur 85% des einströmenden Massenstromes  $\dot{m}_1$  nach 2 strömt, lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{m}_2 = 0,85 \cdot \dot{m}_1 \quad (21)$$

$$A_2 \cdot c_2 \cdot \rho = 0,85 \cdot A_1 \cdot c_1 \cdot \rho \quad \text{①,5d} \quad (22)$$

$$c_2 = 0,85 \cdot c_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = 9,71 \text{ m/s} \quad (23)$$

$c_2$  einsetzen in Gl. (??), daraus folgt:

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \left( 1 - \left( 0,85 \cdot \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right) = 100275,7 \text{ Pa} \quad \text{①,5e} \quad (24)$$

## 2.2b)

Bestimmen Sie die Austrittsfläche  $A_3$ .

Die Austrittsfläche wird mittels der Bernoulli-Gleichung von 1->3 bestimmt.

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_3 + \frac{\rho}{2} \cdot c_3^2 + \rho \cdot g \cdot z_3 \quad (1f) \quad (25)$$

mit

$$z_1 = z_3 \quad (0,5g) \quad p_3 = p_0 \quad (0,5h) \quad (26)$$

folgt:

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot (c_3^2 - c_1^2) \quad (27)$$

Bestimmung von  $c_3$  über die Kontingleichung.

$$\dot{m}_3 = 0,15 \cdot \dot{m}_1 \quad (28)$$

$$A_3 \cdot c_3 \cdot \rho = 0,15 \cdot A_1 \cdot c_1 \cdot \rho \quad (0,5i) \quad (29)$$

$$c_3 = 0,15 \cdot c_1 \cdot \frac{A_1}{A_3} = 24 \text{ m/s} \quad (0,5j) \quad (30)$$

Einsetzen von Gl. (??) in Gl. (??) führt zu:

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \cdot \left( \left( 0,15 \cdot \frac{A_1}{A_3} \right)^2 - 1 \right) \quad (0,5k) \quad (31)$$

$$\frac{2 \cdot (p_1 - p_0)}{\rho \cdot c_1^2} + 1 = \left( 0,15 \cdot \frac{A_1}{A_3} \right)^2 \quad (32)$$

$$A_3 = \frac{0,15 \cdot A_1}{\sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_0)}{\rho c_1^2} + 1}} \quad (33)$$

$$A_3 = 0,005 \text{ m}^2 \quad (34)$$

## 2.2c)

Bestimmen Sie die auf die Anordnung ausgeübte Kraft  $F_x$  unter Berücksichtigung von allen zuvor getroffenen Annahmen.

Aufstellen der Impulsbilanz an Hand des Freikörperbildes:

$$-F_{I,1} + F_{I,2} + F_{I,3} = F_{p,1} - F_{p,2} - F_{p,3} - F_x \quad (1l) \quad (35)$$

$$F_{I,1} = \dot{m} \cdot c_1 = A_1 \cdot \rho \cdot c_1^2 \quad (0,5m) \quad (36)$$

$$F_{I,2} = \dot{m} \cdot c_2 = A_2 \cdot \rho \cdot c_2^2 \quad (0,5n) \quad (37)$$

$$F_{I,3} = \dot{m} \cdot c_3 = A_3 \cdot \rho \cdot c_3^2 \quad (0,5o) \quad (38)$$

$$F_{p,1} = p_1 \cdot A_1 \quad (0,5p) \quad (39)$$

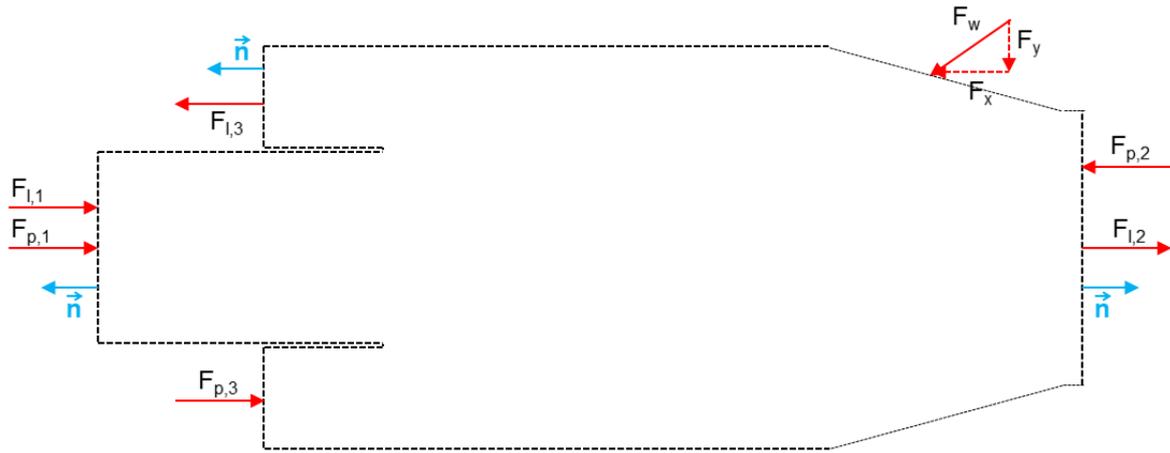


Abb. 3 FKB

$$F_{p,2} = p_2 \cdot A_2 \quad (0,5q) \quad (40)$$

$$F_{p,3} = p_0 \cdot A_3 \quad (0,5r) \quad (41)$$

$$F_x = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 + p_0 \cdot A_3 + A_1 \cdot \rho \cdot c_1^2 - A_2 \cdot \rho \cdot c_2^2 - A_3 \cdot \rho \cdot c_3^2 \quad (0,5s) \quad (42)$$

$$F_x = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 + p_0 \cdot A_3 + A_1 \cdot \rho \cdot c_1^2 - A_2 \cdot \rho \cdot \left(0,85 \cdot c_1 \frac{A_1}{A_2}\right)^2 - A_3 \cdot \rho \cdot \left(0,15 \cdot c_1 \frac{A_1}{A_3}\right)^2 \quad (43)$$

$$F_x = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 + p_0 \cdot A_3 + \rho \cdot c_1^2 \cdot \left(A_1 - 0,85^2 \cdot \frac{A_1^2}{A_2} - 0,15^2 \cdot \frac{A_1^2}{A_3}\right) \quad (44)$$

### 3. Kompressible Strömungen

#### 3.1. Laval-Düse einer Dampfturbine (13,5 Punkte)



Die Laval-Düse einer Dampfturbine wird mit überhitztem Dampf (aus einem ruhenden Kessel, gekennzeichnet als Zustand "1") beaufschlagt mit  $p_1 = 2,8 \text{ MPa}$ , der Eintrittstemperatur von  $T_1 = 400^\circ\text{C}$ , der Eintrittsdichte  $\rho_1 = 9,26 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , der spezifischen Gaskonstante  $R = 461,52 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$  und dem Isentropenexponenten  $\kappa = 1,33$ . Der Dampf soll in der Laval-Düse auf  $p_2 = 700 \text{ kPa}$  und  $T_2 = 210^\circ\text{C}$  entspannt werden. Dabei erreicht die Dampfdichte den Wert von  $\rho_2 = 3,28 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Die Laval-Düse besitzt einen engsten Querschnitt von  $A^* = 0,003 \text{ m}^2$  und ein Querschnittsverhältnis von  $\frac{A_2}{A^*} = 20$ .

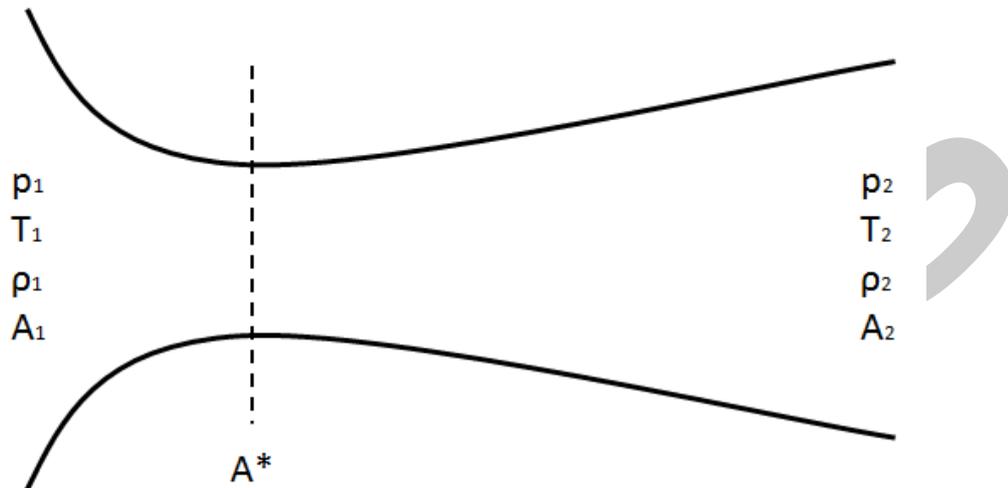


Abb. 4 Laval-Düse

Gegeben:

$$p_1 = 2,8 \text{ MPa}$$

$$R = 461,52 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

$$T_2 = 210^\circ\text{C}$$

$$\frac{A_2}{A^*} = 20$$

$$T_1 = 400^\circ\text{C}$$

$$\kappa = 1,33$$

$$\rho_2 = 3,28 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_1 = 9,26 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$p_2 = 700 \text{ kPa}$$

$$A^* = 0,003 \text{ m}^2$$

**3.1a)**

Arbeitet die Laval-Düse im überkritischen Bereich?

	Symbolschreibweise	Wert
$\frac{p_2}{p_1}$	überkritisch ①	$0,25 < 0,54$ ①

**3.1b)**

Bestimmen Sie die Zustandsgrößen am Düsenaustritt  $c_2$ ,  $a_2$  und  $M_2$  bei isentroper Expansion.

	Symbolschreibweise	Wert
$c_2$	$\sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}\right)}$ ①	842.25 m/s ①

	Symbolschreibweise	Wert
$a_2$	$\sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_2}$ ①	545.2 m/s ①

	Symbolschreibweise	Wert
$Ma_2$	$\frac{c_2}{a_2}$ ①	1.54 ①

**3.1c)**

Bestimmen Sie den Volumen- und Massenstrom in der Düse.

	Symbolschreibweise	Wert
$\dot{V}$	$\frac{A_2}{A^*} \cdot A^* \cdot c_2$ ①	50.54 m <sup>3</sup> /s 0.5

	Symbolschreibweise	Wert
$\dot{m}$	$\rho_2 \cdot \frac{A_2}{A^*} \cdot A^* \cdot c_2$ ①	165.75 kg/s 0.5

**3.1d)**

Der Entspannungsdruck verringert sich auf  $p'_2 = 420\text{kPa}$  und die dazugehörige Temperatur  $T'_2 = 154^\circ\text{C}$ . Ermitteln Sie den neuen Austrittsquerschnitt  $A'_2$  der erforderlich ist, damit die Strömung am Austritt Überschallgeschwindigkeit erreicht.

	Symbolschreibweise	Wert
$A'_2$	$\frac{\dot{m}}{\rho'_2 \cdot c'_2}$ ①	0.0814 m <sup>2</sup> 0.5

**Lösung**

**3.1a)**

Bestimmen des kritischen Druckverhältnisses:

$$\left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right)^* = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (45)$$

$$\left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = \left(\frac{2}{1,33 + 1}\right)^{\frac{1,33}{1,33 - 1}} = 0,54 \quad (46)$$

Vorliegendes Druckverhältnis:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^* = \left(\frac{0,7}{2,8}\right) = 0,25 \quad (47)$$

Es liegt eine überkritische Strömung vor, da  $0,25 < 0,54$

**3.1b)**

Für die Strömung zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 auf dem Stromfaden gilt:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (48)$$

mit  $c_1 = 0$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}\right)} \quad (49)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,33}{1,33 - 1} \cdot \frac{2.800.000 Pa}{9,26 kg/m^3} \cdot \left(1 - \left(\frac{700.000 Pa}{2.800.000 Pa}\right)^{\frac{1,33 - 1}{1,33}}\right)} = 842,25 m/s \quad (50)$$

$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad (51)$$

$$a_2 = \sqrt{1,33 \cdot 461,52 J/kgK \cdot (210^\circ C + 273,15 K)} = 544,58 m/s \quad (52)$$

$$Ma = \frac{c}{a} \quad (53)$$

$$Ma_2 = \frac{c_2}{a_2} = \frac{842,25 m/s}{544,58 m/s} = 1,55 \quad (54)$$

**3.1c)**

Volumenstrom bestimmen:

$$\dot{V}_2 = A_2 \cdot c_2 \quad (55)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{A_2}{A^*} \cdot A^* \cdot c_2 = 20 \cdot 0,003 m^2 \cdot 842,25 m/s = 50,54 \frac{m^3}{s} \quad (56)$$

Massenstrom bestimmen:

$$\dot{m} = \rho_2 \cdot \dot{V}_2 \quad (57)$$

$$\dot{m} = 3,28 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 50,54 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 165,75 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad (58)$$

### 3.1d)

Bestimmen der neuen Geschwindigkeit  $c'_2$ :

$$c'_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left(1 - \left(\frac{p'_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} \quad (59)$$

$$c'_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,33}{1,33 - 1} \cdot \frac{2.800.000 \text{Pa}}{9,26 \text{kg/m}^3} \cdot \left(1 - \left(\frac{420.000 \text{Pa}}{2.800.000 \text{Pa}}\right)^{\frac{1,33-1}{1,33}}\right)} = 955,89 \text{m/s} \quad (60)$$

Die neue Dichte  $\rho'_2$  kann aus der neuen Temperatur  $T'_2$  bestimmt werden:

$$\rho'_2 = \frac{p'_2}{R \cdot T'_2} = \frac{420.000 \text{Pa}}{461,52 \text{J/kgK} \cdot 427,15 \text{K}} = 2,13 \text{kg/m}^3 \quad (61)$$

Für die neue Fläche  $A'_2$  ergibt sich somit:

$$A'_2 = \frac{\dot{m}}{\rho'_2 \cdot c'_2} = \frac{165,66 \text{kg/s}}{2,13 \text{kg/m}^3 \cdot 955,87 \text{m/s}} = 0,0814 \text{m}^2 \quad (62)$$

## Formelsammlung

### Viskosität

$$\eta = \nu \rho \quad (6.1)$$

mit  $\eta$  : dynamische Viskosität, [Ns/m<sup>2</sup>]  
 $\nu$  : kinematische Viskosität, [m<sup>2</sup>/s]  
 $\rho$  : Dichte, [kg/m<sup>3</sup>]

Newtonsches Fluid:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (6.2)$$

mit  $\tau$  : Scherspannung, [N/m<sup>2</sup>]  
 $u$  : Strömungsgeschwindigkeit, [m/s]  
 $y$  : Koordinate senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit, [m]

### Oberflächenspannung und Kapillarität

Drucksprung  $\Delta p$  in der Phasengrenzfläche eines kugelförmigen Tropfens mit dem Radius  $r$ :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad ; \quad \text{mit } \sigma : \text{Oberflächenspannung, [N/m]} \quad (6.3)$$

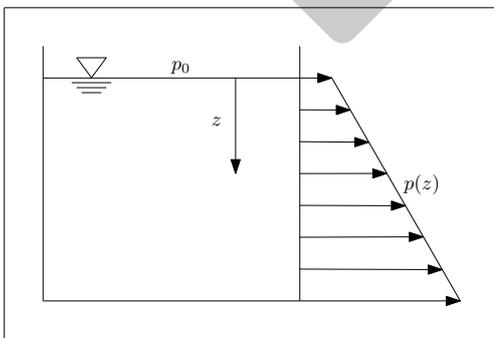
Steighöhe  $h$  bei Kapillaren mit kreisförmigem Querschnitt:

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r} \quad ; \quad \text{mit } \alpha : \text{Randwinkel} \quad (6.4)$$

### Hydrostatik

Hydrostatischer Druck:

$$p(z) = p_0 + \rho g z \quad (6.5)$$



Hydrostatischer Auftrieb:

$$F_A = \rho g V \quad ; \quad \text{mit } V : \text{Volumen der verdrängten Flüssigkeit} \quad (6.6)$$

## Hydrodynamik

### Massenbilanz

$$\frac{dm_{KV}}{dt} = \iiint \rho \vec{n} \cdot \vec{c} \, dA \quad (6.7)$$

mit  $\vec{n}$  : Normalvektor  
 KV : beliebiges Kontrollvolumen

### Impulssatz

$$\iint \rho \vec{c} \vec{n} \cdot \vec{c} \, dA = - \iint p \vec{n} \, dA + \iiint \rho \vec{g} \, dV + \vec{F}_R + \vec{F}_{12} \quad (6.8)$$

mit  $\vec{F}_R$  : Reibungskraft  
 $\vec{F}_{12}$  : Haltekraft/Interaktion mit Wänden

### Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2} \rho c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad (6.9)$$

Erweiterung für verlustbehaftete Strömungen mit Energiezufuhr:

$$\frac{1}{2} \rho c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 + \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{V}} = \frac{1}{2} \rho c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{12} \quad (6.10)$$

mit  $\dot{W}_{12} > 0$  : zwischen Position 1 und 2 zugeführte Leistung, [N m s<sup>-1</sup>]  
 $\dot{V}$  : Volumenstrom, [m<sup>3</sup>/s]  
 $\Delta p_{12}$  : Druckverlust zwischen Position 1 und 2, [Pa]

Druckverlust in Rohrströmungen:

$$\Delta p_{12} = \sum_k \frac{1}{2} \rho c_k^2 \lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2} \rho c_i^2 \xi_i \quad (6.11)$$

mit  $\lambda_k$  : Rohrreibungszahl  
 $l_k$  : Länge des Rohrabschnitts  $k$   
 $d_k$  : Durchmesser des Rohrabschnitts  $k$   
 $\xi_i$  : weitere Verlustbeiwerte des Rohrabschnitts  $i$

### Impulsmomentensatz

$$(\rho_2 c_2^2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2} + p_2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2}) - (\rho_1 c_1^2 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1} + p_1 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1}) = \sum \vec{M}_{12} \quad (6.12)$$

mit  $\sum \vec{M}_{12}$  : Summe der äußeren, an der Oberfläche der Kontrollraumes angreifenden Momente  
 $\vec{e}_t$  : Einheitsvektor, in Strömungsrichtung zeigend

Euler'sche Turbinengleichung:

$$M_{12} = \dot{m}(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}) \quad (6.13)$$

mit  $c_u$  : Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung  
 $r$  : Hebelarm

**Energiebilanz**

$$\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + g z_2\right) - \left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + g z_1\right) = q_{12} \quad (6.14)$$

mit  $u$  : spez. innere Energie, [J/kg]

$q_{12} = \dot{Q}/\dot{m}$  : zwischen Position 1 und 2 zugeführte spezifische Wärmemenge, [J/kg]

**Interne Strömungen****Laminare Rohrströmung**

Geschwindigkeitsprofil:

$$c(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = c_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad (6.15)$$

mit  $\Delta p$  : Druckunterschied zwischen zwei im Abstand  $l$  auf den Stromfaden liegenden Punkten

$l$  : Länge des Rohrabschnittes über dem der Druckunterschied  $\Delta p$  auftritt

Volumenstrom:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l} \quad (\text{Gesetz von Hagen-Poiseuille}) \quad (6.16)$$

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho c_m^2 \lambda \frac{l}{d} \quad (6.17)$$

mit  $c_m$  : über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

$\lambda$  : Rohrreibungszahl

Die Rohrreibungszahl für laminare Strömungen ist

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (6.18)$$

mit der Reynolds-Zahl:

$$Re = \frac{c_m d}{\nu} \quad (6.19)$$

**Turbulente Rohrströmung**

Geschwindigkeitsprofil:

$$\frac{\bar{c}(r)}{\bar{c}_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}, \quad Re \leq 10^5 \quad (6.20)$$

Dieses 1/7-Potenzgesetz gilt nicht in Wandnähe.

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \bar{c}_m^2 \lambda \frac{l}{d} \quad (6.21)$$

mit  $\bar{c}_m$  : zeitliche und über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

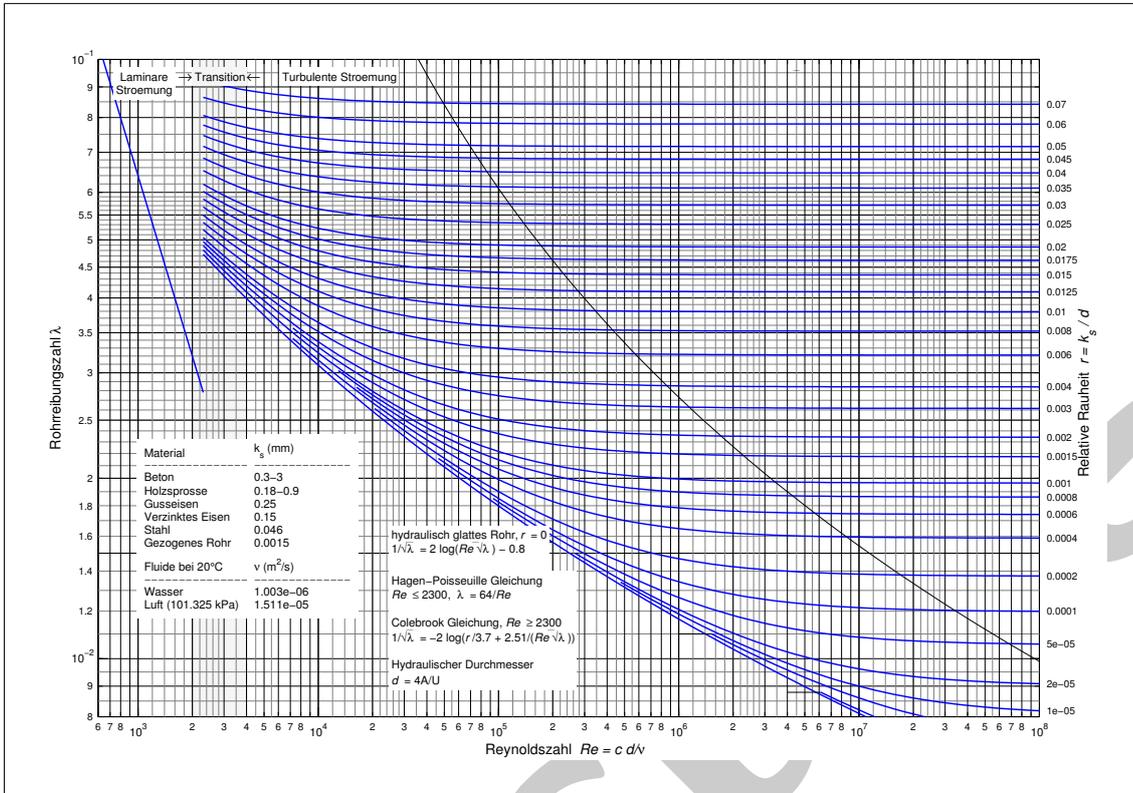
Die Rohrreibungszahl für hydraulisch glatte Rohre:

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} \quad \text{für } Re \leq 10^5 \quad (\text{Blasius}) \quad (6.22)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad \text{für } 10^5 \leq Re \leq 3 \cdot 10^6 \quad (\text{Prandtl}) \quad (6.23)$$

### Moody-Diagramm

Das Moody-Diagramm stellt die Rohrreibungszahl  $\lambda$  in Abhängigkeit der Reynoldszahl  $Re$  (laminare und turbulente Strömungen) und der äquivalenten Sandkornrauigkeit  $k_s$  für technisch raue Rohre dar.



### Externe Strömungen

#### Grenzschicht an einer ebenen Platte

Grenzschichtdicke (laminar):

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}} \tag{6.24}$$

Reynoldszahl bezogen auf die Lauflänge:

$$Re_x = \frac{c_\infty x}{\nu} \tag{6.25}$$

mit  $c_\infty$  : Anströmgeschwindigkeit parallel zur Plattenoberfläche  
 $x$  : überströmte Länge, Beginn: Plattenvorderkante

Laminar-turbulenter Umschlag:

$$Re_{x_{krit}} = \frac{c_\infty x_{krit}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5 \tag{6.26}$$

### Strömungswiderstand

Gesamtwiderstand

$$F_W = F_{w,\tau} + F_{w,p} = c_w \frac{\rho}{2} c_\infty^2 A \tag{6.27}$$

mit  $F_{w,\tau}$  : Widerstandskraft infolge der Reibung  
 $F_{w,p}$  : Widerstandskraft infolge der Druckdifferenz  
 $c_w$  : Widerstandskoeffizient  
 $A$  : angeströmte oder umströmte Fläche

Reibungswiderstand einer ebenen Platte:

$$c_{w,\tau} = \begin{cases} \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}} & \text{lam. Grenzschicht} \\ \frac{0,074}{Re_l^{1/5}} & \text{turb. Grenzschicht} \end{cases} \quad (6.28)$$

mit  $Re_l : \frac{c_\infty l}{\nu}$

## Ausströmvorgänge

Ausströmgeschwindigkeit für ein *inkompressibles* Fluid ( $c_{innen} = c_0 = 0$ ):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p_{aus}) + 2gh} \quad (6.29)$$

Ausströmgeschwindigkeit für ein *kompressibles* Fluid ( $c_{in} = 0$ ):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_0 \left( 1 - \left( \frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} \quad (6.30)$$

Massenstrom:

$$\dot{m} = A_{aus} c_{aus} \rho_{aus} = A_{aus} \sqrt{2p_0 \rho_0} \psi \quad (6.31)$$

mit Ausflußfunktion:

$$\psi = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1} \left( \left( \frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left( \frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right)} \quad (6.32)$$

Kritisches Druckverhältnis:

$$\left( \frac{p_{aus}}{p_0} \right)^* = \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (6.33)$$

## Gasdynamik

Thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad ; \quad \text{mit } R : \text{Gaskonstante, [J/(kg K)] und } T : \text{Temperatur, [K]} \quad (6.34)$$

Isentropenbeziehung:

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \quad ; \quad \text{mit } \kappa = \frac{c_p}{c_v} : \text{Isentropenexponent} \quad (6.35)$$

$$R = c_p - c_v = \frac{\kappa-1}{\kappa} c_p \quad (6.36)$$

Spezifische Enthalpie:

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad \text{mit } u : \text{ spez. innere Energie, [J/kg]} \quad (6.37)$$

Schallgeschwindigkeit:

$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad (6.38)$$

Mach-Zahl:

$$Ma = c/a \quad (6.39)$$

Zustandsänderung aus dem Ruhezustand ( $X_0$ ) für ein ideales Gas bei isentroper, verlustfreier, stationärer Strömung:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \quad (6.40)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.41)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.42)$$

Zustandsänderung für den kritischen Zustand ( $X^*$ ) eines idealen Gases in einer isentropen, verlustfreien, stationären Strömung:

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (6.43)$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.44)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.45)$$

Für die Strömungen zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 auf dem Stromfaden gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2) \right) \quad (6.46)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2) \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.47)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2) \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.48)$$