Universität Hannover
Institut für Strömungsmaschinen
Prof. Dr.-Ing. J .Seume

Klausur Herbst 2003

„Strömungsmechanik I“

Bearbeitungsdauer: **PO ´97 : 120 min**

zugelassene Hilfsmittel:

Taschenrechner
Formelsammlung-IfS, ohne handschriftliche Ergänzungen
Lineal und Schreibmaterial
mitgebrachtes Papier

weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen
Die zu verwendenden Indices sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen.

Name	Vorname	Matr. Nummer

	mögliche Punktezahl	erreichte Punktezahl
Aufgabe 1	26	
Aufgabe 2	44	
Aufgabe 3	30	
Aufgabe 4	27	
Gesamt	127	
	Note	

Viel Erfolg!

Universität Hannover
Institut für Strömungsmaschinen
Prof. Dr.-Ing. J .Seume

Klausur Herbst 2003

„Strömungsmechanik I"

Bearbeitungsdauer: **PO 2000 : 90 min**

zugelassene Hilfsmittel:

Taschenrechner
Formelsammlung-IfS, ohne handschriftliche Ergänzungen
Lineal und Schreibmaterial
mitgebrachtes Papier

weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen
Die zu verwendenden Indices sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen.

Name	**Vorname**	**Matr. Nummer**

	mögliche Punktezahl	**erreichte Punktezahl**
Aufgabe 1	**26**	
Aufgabe 2	**44**	
Aufgabe 3	**30**	
Gesamt	**100**	
	Note	

Viel Erfolg!

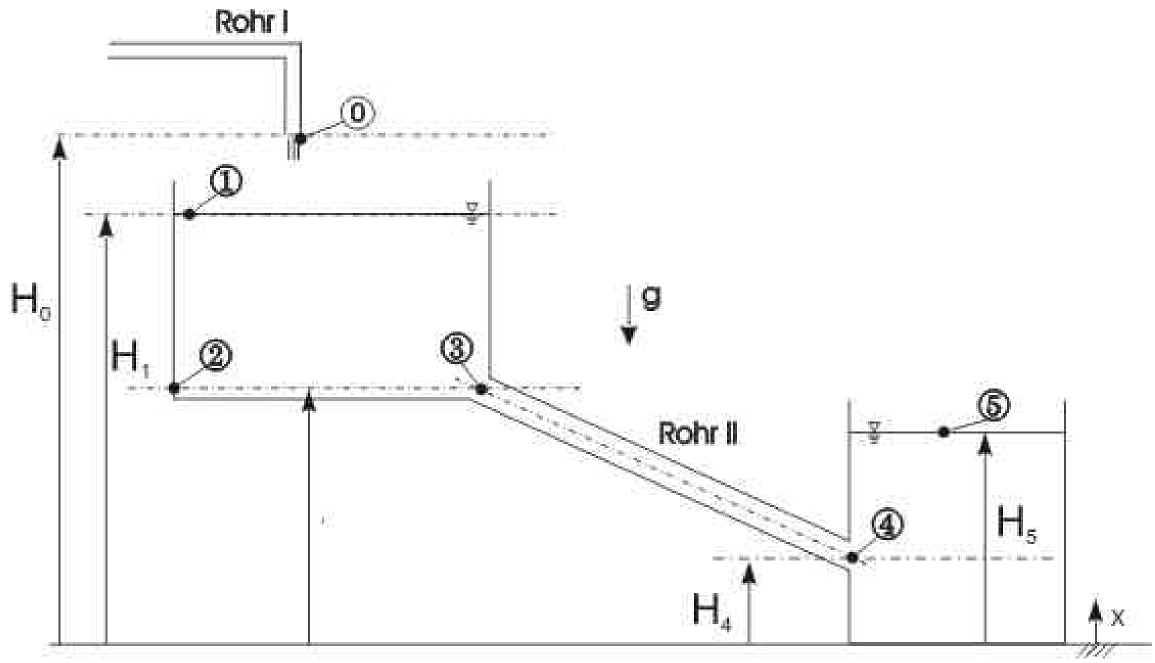
Aufgabe 1 - Kurzfragen (26 Punkte)

Kurzfrage a

Gegeben ist das System zweier miteinander verbundenen Behälter. Die Höhen H_1 und H_5 seien konstant.

Ka1) Benennen Sie alle Punktepaare, zwischen denen ein Stromfaden eingezeichnet werden kann und begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

Ka2) Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeiten im Rohr_II. (5 Punkte)



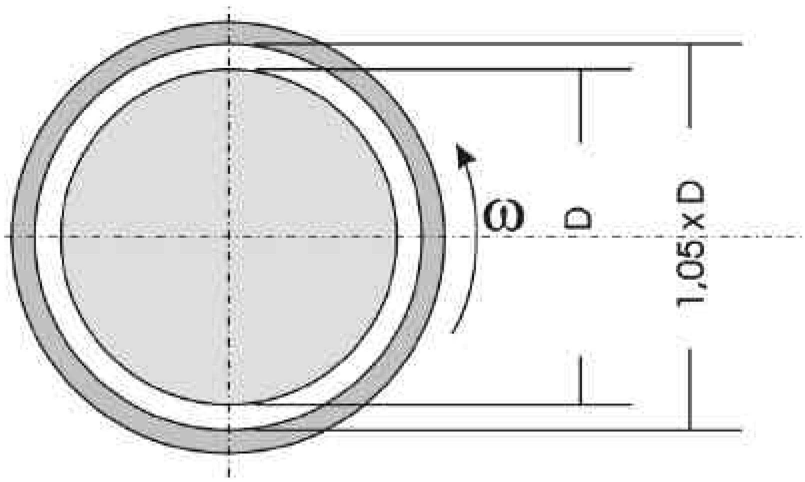
Gegeben:

$H_0 = 12$ m ; $H_1 = 10$ m; $H_2 = H_3 = 5{,}5$ m; $H_4 = 2$ m; $H_5 = 5$ m

$g = 9{,}81$ m/s^2

Kurzfrage b

Gegeben ist ein feststehender Zylinder, um den ein Hohlzylinder mit einer Winkelgeschwindigkeit von ω rotiert. In dem Ringspalt befindet sich Wasser. Die Krümmung des Spaltes kann vernachlässigt werden. Der Hohlzylinder wird über einen Motor (hier nicht dargestellt) angetrieben, der verlustfrei arbeitet.



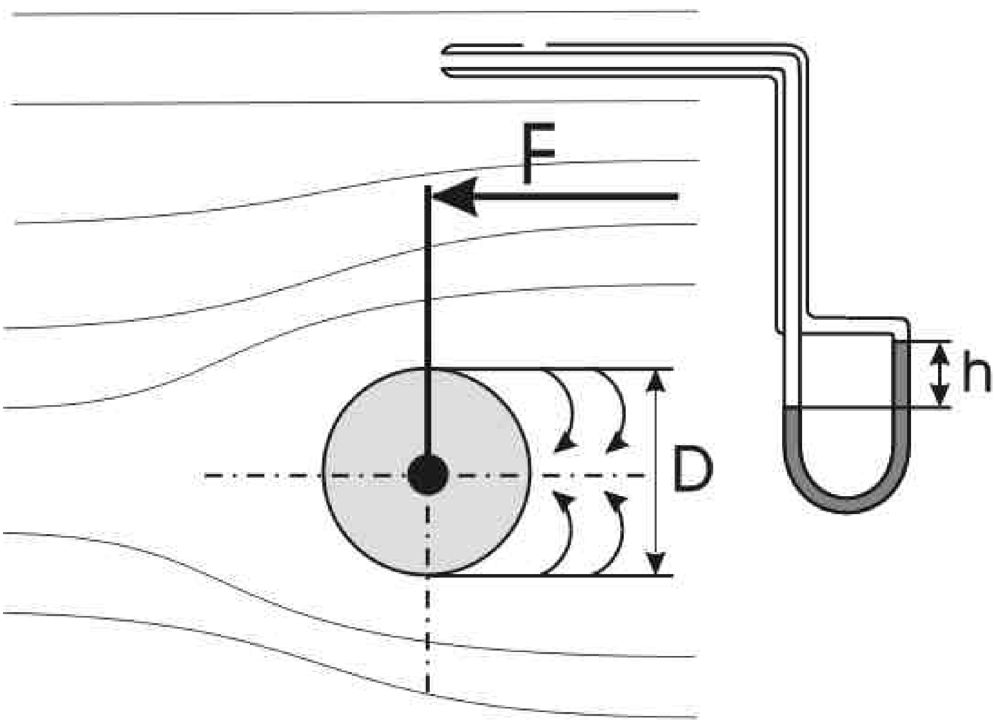
Kb1) Wie groß ist die Leistung, mit der der Motor betrieben werden muss?

(9 Punkte)

Gegeben: $D_{Zylinder,\ aussen} = 0{,}15$ m
$D_{Hohlylinder,\ innen} = 1{,}05 * D_{Zylinder,\ aussen}$
Zylinderlänge = 0,1 m
Hohlzylinderlänge = 0,1 m
$\nu_{wasser} = 1{,}0*10^{-6}\ m^2/s$
$\omega = 3000$ 1/s
$\rho_{Wasser} = 1000\ kg/m^3$
$\eta_{Motor} = 1$

Kurzfrage c

In einem Strömungskanal wird über eine Kraftmessung an der Aufhängung der c_W-Wert einer Kugel ermittelt. Gleichzeitig wird mit Hilfe einer Prandtl-Sonde die freie Anströmgeschwindigkeit ermittelt.



Gegeben: $h = 0{,}15$ m $\quad D = 0{,}10$ m $\quad g = 9{,}81$ m/s^2

$\rho_{Luft} = 1{,}0$ kg/m^3 $\quad \rho_{Messflüssigkeit} = 1000$ kg/m^3

$F = 10$ N

Kc1) Welche Arten des Drucks gehen an welchen Stellen bei der Messung mit einer Prandtl-Sonde ein? Berechnen Sie die freie Anströmgeschwindigkeit. (5 Punkte)

Kc2) Berechnen Sie den c_W-Wert der Kugel. Was geschieht wenn, die Kugel in Uhrzeigersinn in Rotation versetzt wird? Begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)

Aufgabe 2 (44 Punkte)

Gegeben ist eine Bewässerungsgondel zum Einsatz in einer Gärtnerei. Sie ist über eine Versorgungsleitung mit einer Pumpe verbunden, die das Wasser aus einem zentralen Reservoir hinaufpumpt (s. Skizze 1). Die Gondel verfügt über ein Verzweigungsstück, an dem zwei Querarme sowie ein tellerförmiger Verteiler befestigt sind. Die Massenströme teilen sich zu je einem Drittel. An jedem Querarm sind zwei(!) Öffnungen unterschiedlichen Querschnitts angebracht, aus denen das Wasser hinausströmt. Der Verteiler besteht am unteren Ende aus einer tellerförmigen Platte, die das Wasser kreisförmig verteilt (s. Skizze 2) und mit 2 Stegen befestigt ist.

Gegeben:

Versorgungleitung:
$D_1 = 0{,}05$ m
$L = 120$ m

Verzweigungsstück:
$p_1 = 2{,}5$ bar
$D_1 = 0{,}05$ m

Querarme:
$D_2 = 0{,}01$ m
$D_3 = 0{,}02$ m

allgemein:
$p_U = 1{,}013$ bar
$g = 9{,}81$ m/s^2
$\rho_{Wasser} = 1000$ kg/m^3
$\nu_{wasser} = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ m^2/s

Pumpe
$\eta = 0{,}75$

Höhen:
$H_0 = -0{,}5$ m
$H_1 = 2$ m

Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar.

2a) Die Pumpe erreicht an der Stelle ① den notwendigen Druck von 2,5 bar. Der Massenstrom betrage in diesem Fall $\dot{m} = 1{,}5$ kg/s. Die Strömung sei reibungsbehaftet. Das Rohr kann als hydraulisch glatt betrachtet werden. Als effektive Rohrlänge soll nur der Abschnitt zwischen Pumpe und Gondel verwendet (L) werden. Die Höhe H_0 soll als konstant angenommen werden.

Wie groß ist die Anschlussleistung der Pumpe (Wirkungsgrad siehe oben)? (10 Punkte)

noch 2a) Für eine Tandemanordnung der Bewässerungsgondel wird erwogen, eine Parallelleitung inklusive einer baugleichen Pumpe zu installieren. Eine Alternative ist, die bestehende Leitung mit dem doppelten Massenstrom zu beaufschlagen und eine größere Pumpe besseren Wirkungsgrades ($\eta_{Alternativpumpe} = 0{,}80$) einzusetzen.

Errechnen Sie, welche der beiden Möglichkeiten energetisch günstiger ist und begründen Sie das Ergebnis! (7 Punkte)

2b) Die Strömung im Verzweigungsstück und in den Querarmen sei reibungsfrei.

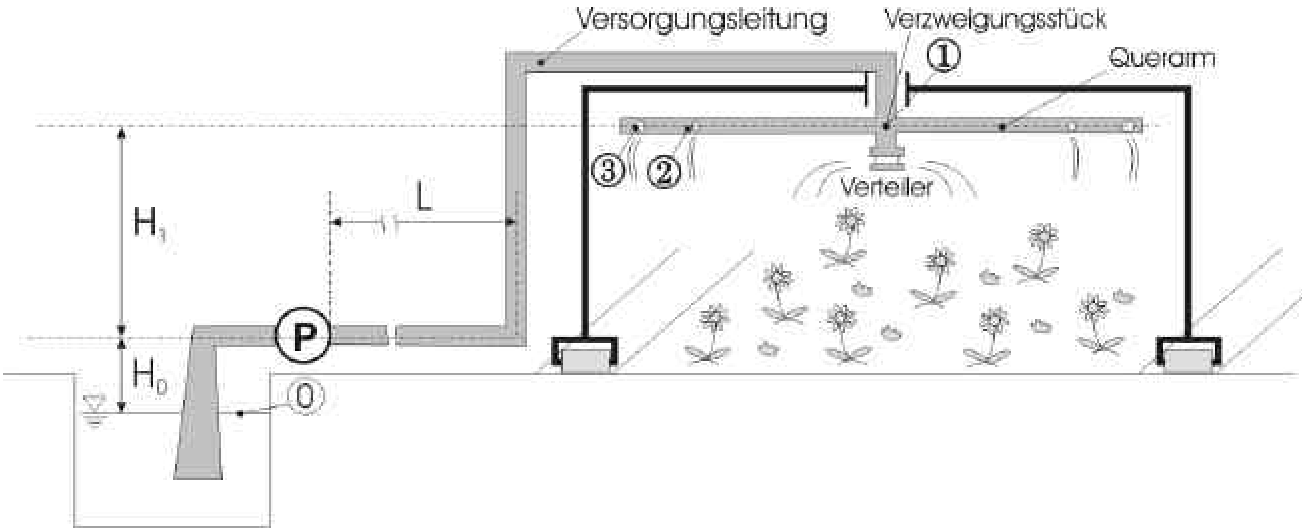
Errechnen Sie mit Hilfe der Durchmesserangaben an den Stellen ①, ② und ③ die jeweiligen Geschwindigkeiten und Massenströme ($\dot{m}_1 \neq 1{,}5$ kg/s aus Aufgabenteil a)

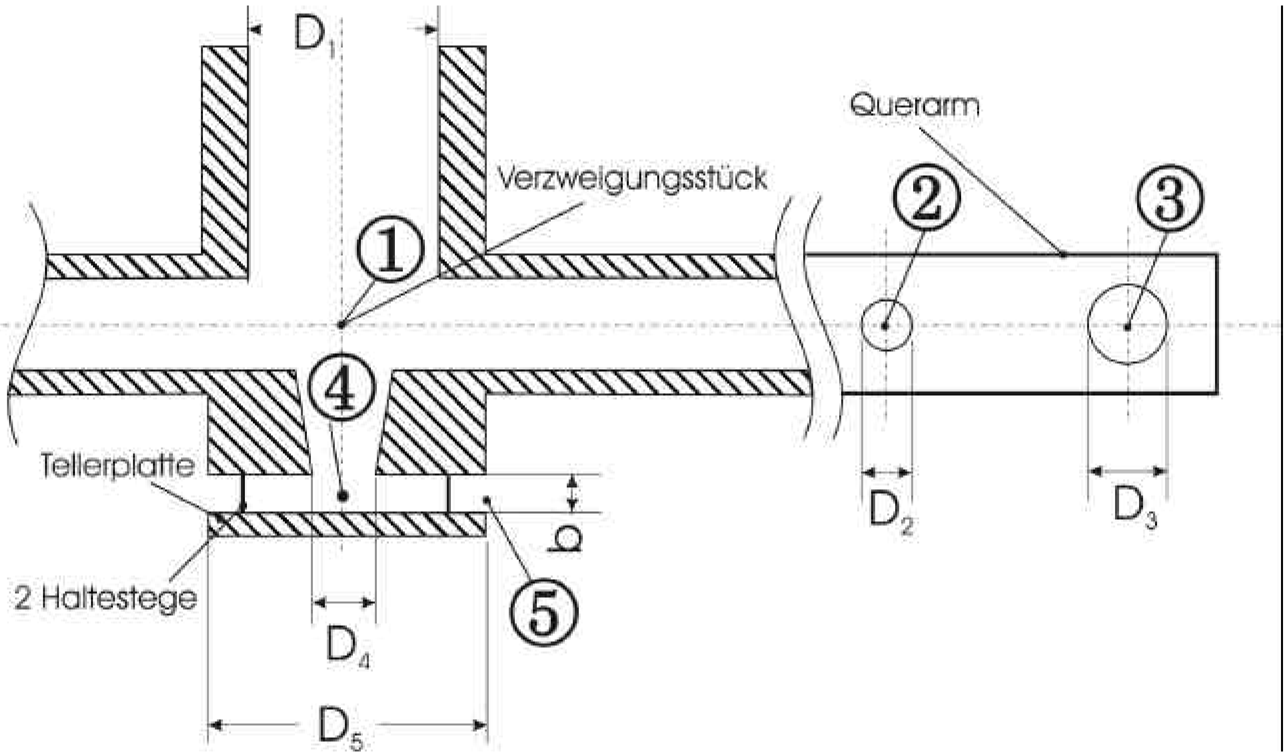
(13 Punkte)

2c) Im Bereich $r<D_4/2$ darf von einer konstanten Druckverteilung ausgegangen und der Einfluss des dynamischen Druckes vernachlässigt werden. Die Strömung sei reibungsfrei. D_4, D_5, b, $\dot{m}_5$, m_{Platte} seien bekannt.

Stellen Sie das vollständige Kräftegleichgewicht für die kreisförmige Platte am Verteiler auf! Formulieren Sie alle Terme in allgemeiner Form weitest möglich aus! Das Kraftintegral muss nicht gelöst werden! Erstellen Sie eine Skizze, bei der alle Kräfte sowie die Druckverteilungen an der Platte qualitativ eingezeichnet sind! (14 Punkte)

Aufgabe 2: Skizze:1+2





Aufgabe 3 (30 Punkte)

Gegeben ist ein Gitterwindkanal quadratischen Querschnitts, mit dem strömungstechnische Grundlagenuntersuchungen an Turbinenschaufeln unternommen werden. Hier wird eine parallele Anordnung gerader Turbinenschaufeln, Gitter genannt, installiert, bei der eine Entspannung und Umlenkung der Luft erfolgt. In dem vorliegenden Versuch wird ein transsonisches Gitter, bei dem also die Luft auf Schallgeschwindigkeit beschleunigt wird, bei dem kritischen Entspannungsverhältnis untersucht. Mit Hilfe einer kombinierten Sonde werden der Totaldruck und die Totaltemperatur stromaufwärts (Position ①) des Turbinengitters erfasst. Eine definierte Querschnittsverengung des Zustromkanals ermöglicht eine exakte Massenstrombestimmung.
Gegeben:

Luft:
$p_u = 1{,}013$ bar
$T_u = 15°C$
$R = 287$ J/kg K
$\kappa = 1{,}4$

allgemein:
$g = 9{,}81 \ m/s^2$
$0°C = 273{,}15$ K

Position ①:
$T_1 = 333{,}15$ K
$Ma_1 = 0{,}6$
$p_1 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Pa
$b_1 = 0{,}15$ m

Position ②:
$p_2 = 1{,}4 \cdot 10^5$ Pa
$b_2 = 0{,}1398$ m

Position ④:
$T_4 = 297{,}61$ K
$Ma_4 = 1$
$\alpha = 20°$

Alle Aufgabenteile sind voneinander unabhängig lösbar.
Die Luft kann in allen Teilaufgaben als ideales Gas, die Strömung als reibungsfrei und isentrop angenommen werden.

3a) Es wird die Sondenmessung betrachtet. Für diesen Aufgabenteil seien die stat. Temperatur und der stat. Druck an der Position ① unbekannt. Die gemessenen Größen betragen 80°C und $1{,}8 \cdot 10^5$ Pa.

Berechnen Sie sind mit Hilfe der Messdaten Temperatur und Druck der freien Strömung!

(6 Punkte)

3b)

Wie groß sind Temperatur, Geschwindigkeit und Massenstrom an der Position ②?

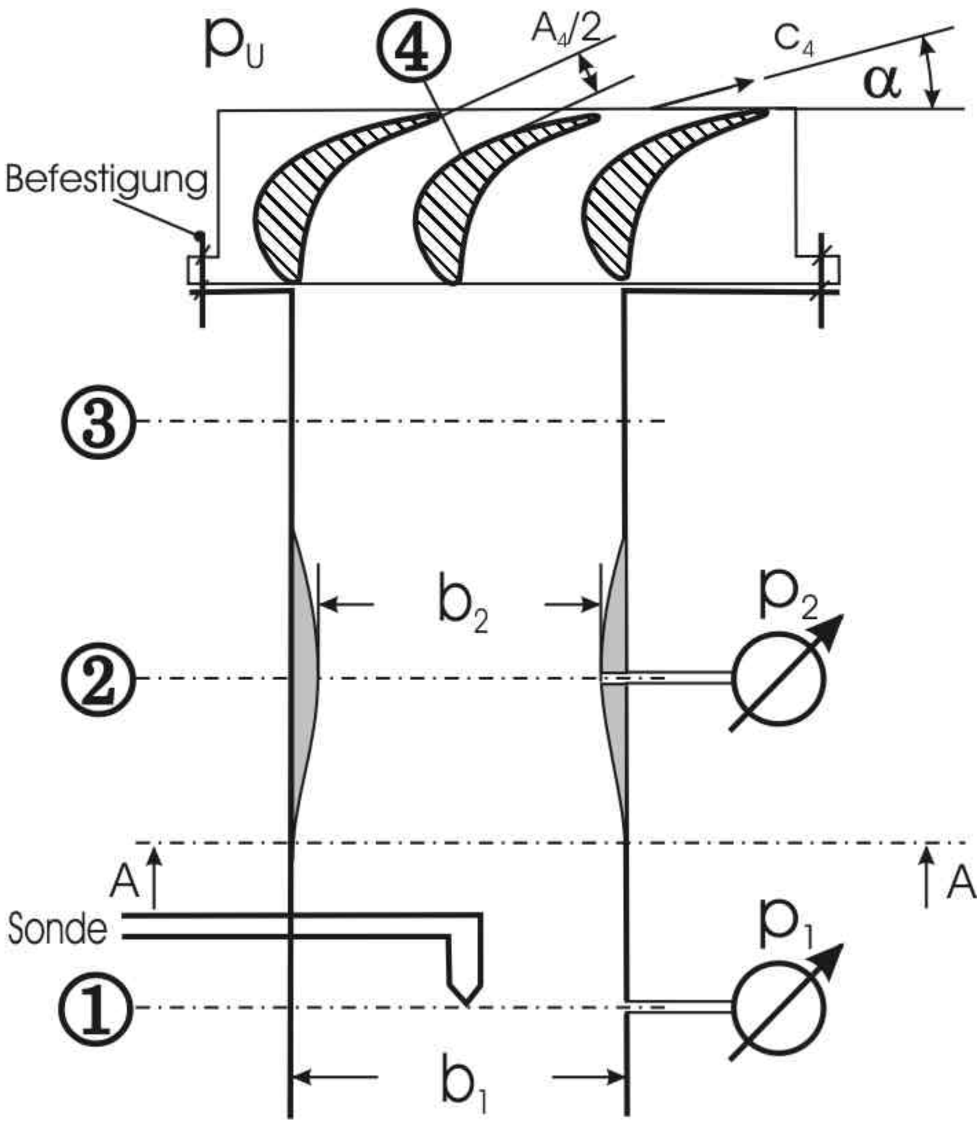
(12 Punkte)

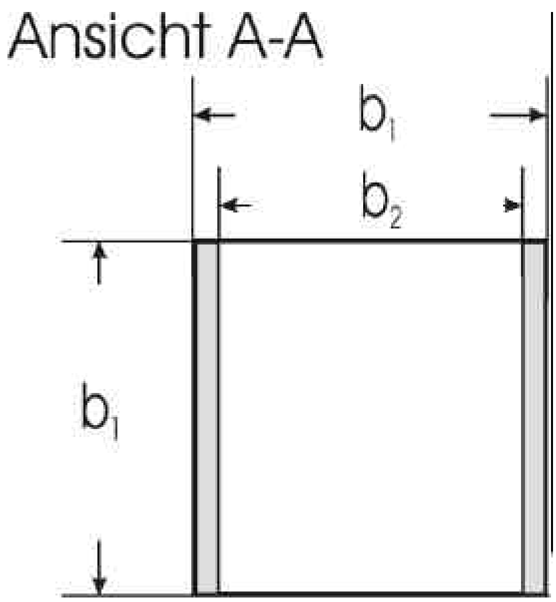
3c) Der Massenstrom durch den Gitterwindkanal betrage 10 kg/s.

Wie groß ist das Verhältnis der Kanalquerschnittsfläche (A_1) zur Austrittsquerschnittsfläche (A_4) des Gitters? Wie groß sind die Kräfte in horizontaler sowie vertikaler Richtung auf die Befestigung des Turbinengitters?

(12 Punkte)

Skizze: Gitterwindkanal



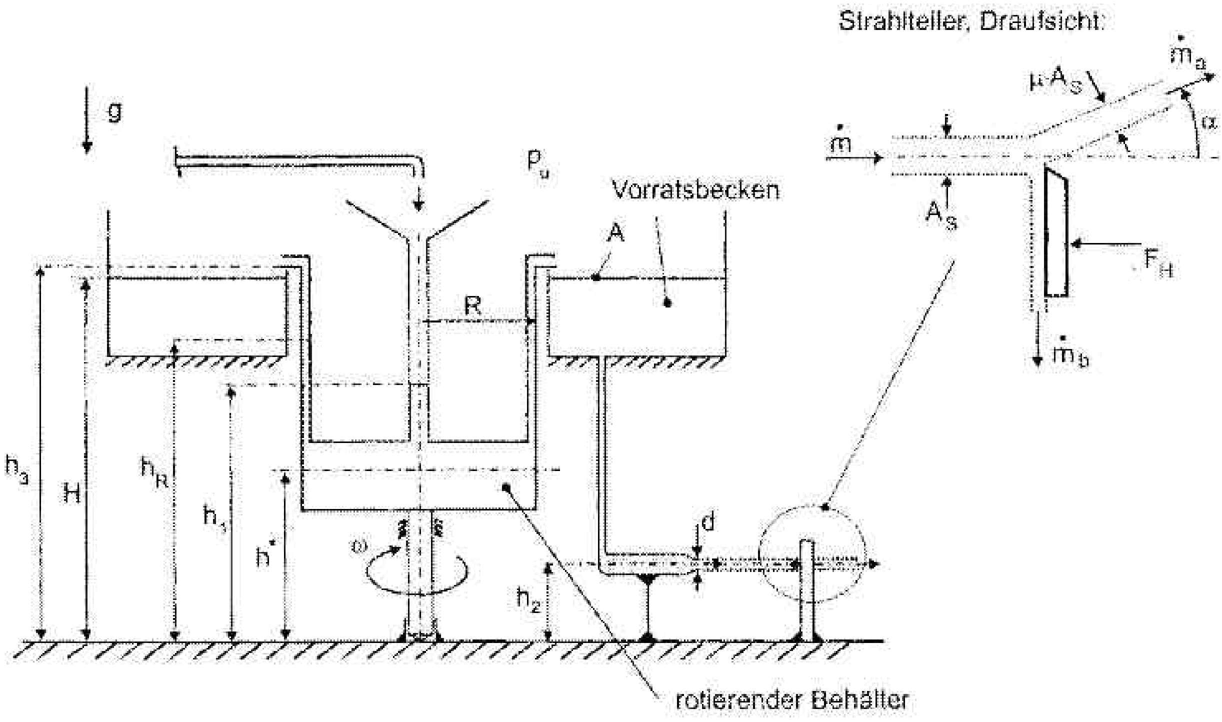


Aufgabe 4 (27 Punkte)

Aus einem ringförmigen Vorratsbecken mit konstanter Wasserspiegelhöhe H fließt Wasser (Dichte ρ) durch eine Rohrleitung zur Düse (Düsendurchmesser d), die es als Freistrahl verlässt. Der Freistrahl trifft auf den skizzierten Strahlteiler und wird in der dargestellte Weise gespalten. Der Vorratsbehälter wird dadurch gespeist, dass das Wasser im Ringspalt (Radius R, keine Kapillarwirkung) des rotierenden Behälters aufsteigt und bei ausreichend hoher Rotationsgeschwindigkeit ω in den Vorratsbehälter überläuft. ($h_R = h_3$). Durch einen Zufluss wird sichergestellt, dass die Höhe h_1 des Wasserspiegels in der Mitte des rotierenden Behälters unabhängig von der Rotationsgeschwindigkeit stets konstant ist. Sämtliche Wasseroberflächen sind als waagerecht zu betrachten, d.h. der Einfluss der Rotation auf die Oberflächengeometrie werde vernachlässigt.

Die Strömung sei reibungsfrei und inkompressibel.

Gegeben:	$h_1 = 1{,}5$ m	$R = 1$ m	$p_{Umgebung} = 1$ bar
	$h_2 = 0{,}5$ m	$d = 2$ cm	$\rho = 1000$ kg/m^3
	$h_3 = 3{,}2$ m	$\mu = 2/3$	$g = 9{,}81$ m/s^2
		$A \gg d$	
	$H = 3$ m	$\dot{m} = 2{,}2$ kg/s	



a) Berechnen Sie die Teilmassenströme $\dot{m}_a$ und $\dot{m}_b$, den Winkel α und die von der Strömung auf den Strahlteiler ausgeübte Kraft F_H. Der Einfluss der Gravitation auf den Freistrahl kann vernachlässigt werden. (12 Punkte)

b) Leiten Sie die radiale Druckverteilung $p(r,h^*)$ in der durch h^* festgelegten Ebene (siehe Abbildung) her. Beginnen Sie dabei mit der Kräftebilanz am Fluidelement (Skizze!). Die Flüssigkeit rotiere wie ein Festkörperwirbel. (10 Punkte)

c) Bei welcher Winkelgeschwindigkeit ω_{krit} beginnt das Wasser in das Vorratsbecken zu fließen? (5 Punkte)

Musterlösung der Klausur Strömungsmechanik I im Herbst 2003

27. Januar 2004

herausgegeben vom

Institut für Strömungsmaschinen

Universität Hannover

Aufgabe 1

Kurzfrage a

Ka1)

- $1 \longrightarrow 3$
- $1 \longrightarrow 4$
- $2 \longrightarrow 3$
- $2 \longrightarrow 4$
- $3 \longrightarrow 4$

Begründung: maximal ein Punkt mit c=0, (Stromfaden kann nicht weiter als bis zum Querschnitt 4 geführt werden, da anschließend Verwirbelungen auftreten und die Stromfadentheorie dort nicht angewendet werden kann)

Ka2)

Bernoulli von 1 nach 4:
$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_4}{\rho} + gh_4 + \frac{c_4^2}{2}$

Mit $p_1 = p_0$, $c_1 = 0$ und $p_4 = p_0 + \rho g(h_5 - h_4)$:

$\frac{p_0}{\rho} + gh_1 = \frac{p_0}{\rho} + g(h_5 - h_4) + gh_4 + \frac{c_4^2}{2}$
$c_4 = \sqrt{2g(h_1 - h_5)} = \sqrt{2 \cdot 9,81\frac{m}{s^2} \cdot (10m - 5m)} = \underline{\underline{9,905\ m/s}}$

Kurzfrage b

linearer Geschwindigkeitsverlauf $\longrightarrow$ Couette-Strömung: $u(y) = \frac{U}{h} \cdot y$
$U = u_2 = \omega \cdot \frac{D_{Hohlzylinder}}{2} = 236,25m/s$

$\tau = \eta\frac{du}{dy}$

$\tau = \eta \cdot \frac{U}{h} = \nu \cdot \rho \cdot \frac{U}{0{,}05D\cdot\frac{1}{2}} = 1,0 \cdot 10^{-6} m^2/s \cdot 1000 \frac{kg}{m^2} \cdot \frac{236{,}25 m/s}{0{,}05\cdot 0{,}15 m \cdot 0{,}5} = 63,0 N/m^2$

Kraft auf den Hohlzylinder:

$F = \tau \cdot A = \tau \cdot \pi D_{Hohlzylinder} L = 63,0 N/m^2 \cdot \pi \cdot 0,1575 m \cdot 0,1 m = 3,12 N$

Antriebsleistung:

$P = M \cdot \omega = F \cdot \frac{1{,}05\cdot D}{2} \cdot \omega = 3,12 N \cdot \frac{1{,}05\cdot 0{,}15 m}{2} \cdot 3000 1/s = \underline{\underline{737,1\ W}}$

Kurzfrage c

Kc1)

Über die Öffnung an der Sondenspitze wird der Totaldruck gemessen, während über die seitliche Öffnung der statische Druck aufgenommen wird. Mit Hilfe der Messflüssigkeits-Säule wird die Differenz beider Drücke gebildet und so der dynamische Druck bestimmt.

Kräftegleichgewicht:

$\Delta h \cdot \rho_M \cdot g = p_0 - p_{stat} = p_{dyn}$

$\Delta h \cdot \rho_M \cdot g = \frac{\rho_L}{2} \cdot c^2$

$c = \sqrt{2 \Delta h \cdot g \cdot \frac{\rho_M}{\rho_L}} = \sqrt{2 \cdot 0,15 m \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1000}{1}} = \underline{\underline{54,249\ m/s}}$

Kc2)

$c_W = \frac{F}{\frac{\rho_L}{2} \cdot u_\infty^2 \cdot A} = \frac{10N}{\frac{1\frac{kg}{m^3}}{2} \cdot (54{,}249 m/s)^2 \cdot \pi \cdot \frac{(0{,}1m)^2}{4}} = \underline{\underline{0,8653}}$

Es gibt eine Kraftkomponente in vertikaler Richtung auf die Kugel.Das Fluid wird an der Unterseite der Kugel gestaut (Druck steigt) und an der Oberseite beschleunigt(Druck sinkt). Die Resultierende dieses Druckgefälles zeigt somit nach oben (in positive y-Richtung).

Aufgabe 2

2a)

Erweiterte Bernoulli-Gleichung von 0 nach 1:

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gh_0 + \frac{P_{id}}{\dot{m}} = \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{\lambda}{2}\frac{l}{d} \cdot c_1^2$$

$$P_{id} = \dot{m}(\frac{c_1^2}{2}(1 + \frac{\lambda l}{d}) + \frac{p_1 - p_0}{\rho} + g(h_1 - h_0))$$

$$c_1 = \frac{4\dot{m}}{\rho \pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 1{,}5\frac{kg}{s}}{1000\frac{kg}{m^3} \cdot \pi \cdot (0{,}05m)^2} = 0,7639 m/s$$

$$Re = \frac{c_1 \cdot D_1}{\nu} = \frac{0{,}7639\frac{m}{s} \cdot 0{,}05m}{10^{-6}\frac{m^2}{s}} = 38197$$

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{Re^{1/4}} = 0,0226$$

$$\begin{aligned} P_{id1} &= 1,5\frac{kg}{s}(\frac{(0{,}7639\frac{m}{s})^2}{2}(1 + \frac{0{,}0226 \cdot 120m}{0{,}05m}) + \frac{(2{,}5-1{,}013)\cdot 10^5\frac{N}{m^2}}{1000\frac{kg}{s}} + 9,81\frac{m}{s^2}(2m - (-0,5m))) \\ &= 284,20W \end{aligned}$$

$$P_{real1} = \frac{P_{id1}}{\eta_1} = \frac{284{,}20W}{0{,}75} = \underline{\underline{378,93\ W}}$$

noch 2a)

Fall: Verwendung derselben Leitung mit einer größeren Pumpe

Formeln wie oben:

$$c_1 = 1,5278 m/s,\ Re = 76394,\ \lambda = 0,0190$$

$$\begin{aligned} P_{id2} &= 3\frac{kg}{s}(\frac{(1{,}5278\frac{m}{s})^2}{2}(1 + \frac{0{,}019 \cdot 120m}{0{,}05m}) + \frac{(2{,}5-1{,}013)\cdot 10^5\frac{N}{m^2}}{1000\frac{kg}{s}} + 9,81\frac{m}{s^2}(2m - (-0,5m))) \\ &= 682,83W \end{aligned}$$

$$P_{real2} = \frac{P_{id2}}{\eta_2} = \frac{682{,}83W}{0{,}8} = \underline{\underline{853,54\ W}}$$

Da $2 \cdot P_{real1} = 757,86W < P_{real2}$, ist die Installation einer zweiten, identischen Rohrleitung energetisch günstiger. In der Anordnung mit der größeren Pumpe macht der stark erhöhte Druckverlust aufgrund der Reibung den Vorteil des besseren Pumpenwirkungsgrades zunichte.

2b)

<u>Bernoulli-Gleichung von 1 nach 2:</u>

$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + \frac{c_2^2}{2}$

Mit $h_1 = h_2$: $c_2 = \sqrt{c_1^2 + \frac{2(p_1-p_2)}{\rho}}$

Analoges Vorgehen von 1 nach 3 führt auf $c_3 = \sqrt{c_1^2 + \frac{2(p_1-p_2)}{\rho}}$, daher $c_2 = c_3$.

<u>Konti-Gleichung:</u>

$\frac{1}{3}\rho A_1 c_1 = \rho A_2 c_2 + \rho A_3 c_3$

Mit $c_2 = c_3$ ergibt sich: $c_2 = \frac{A_1}{3(A_2+A_3)} c_1 = \frac{D_1^2}{3(D_2^2+D_3^2)} c_1$

Einsetzen in Gl.1 liefert:

$(\frac{D_1^2}{3(D_2^2+D_3^2)})^2 \cdot c_1^2 = c_1^2 + \frac{2(p_1-p_2}{\rho}$

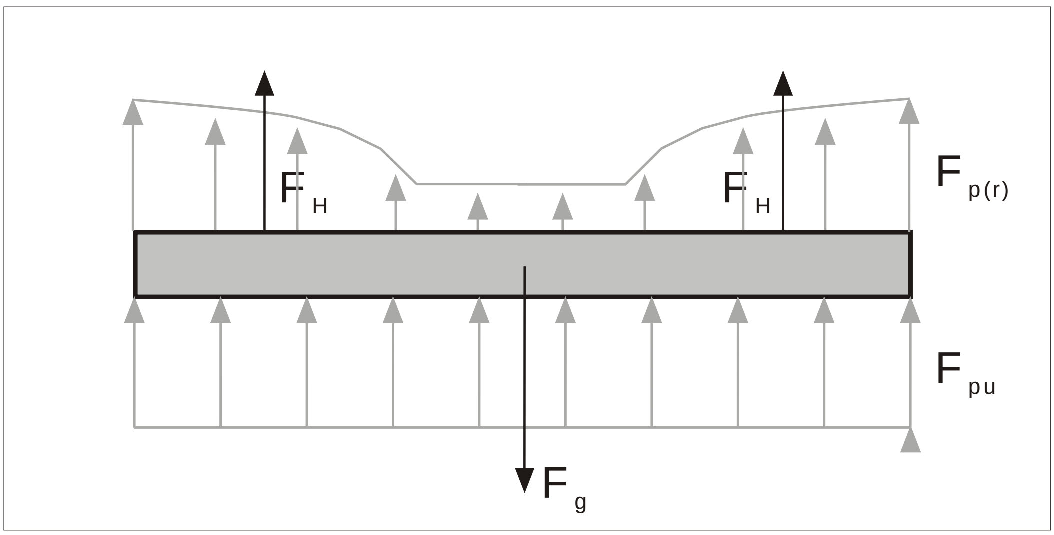
$c_1 = \sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{((\frac{D_1^2}{3(D_2^2+D_3^2)})^2-1)\cdot\rho}} = \sqrt{\frac{2(2{,}5-1{,}013)\cdot 10^5 \frac{N}{m^2}}{((\frac{(0{,}05m)^2}{3((0{,}02,)^2+(0{,}01m)^2)})^2-1)\cdot\rho}}$

$c_1 = \underline{\underline{12,93\ m/s}}$
$c_2 = c_3 = \underline{\underline{21,55\ m/s}}$
$\dot{m}_1 = \underline{\underline{25,288\ kg/s}}$

$\dot{m}_2 = \underline{\underline{1,692\ kg/s}}$
$\dot{m}_3 = \underline{\underline{6,77\ kg/s}}$

2c)

<u>Kräftegleichgewicht:</u> $\sum F_y = 2F_H + F_{p_u} - F_g - F_{p(r)} = 0$



Kraft aufgrund des Umgebungsdrucks: $F_{p_u} = p_u \cdot \pi \cdot \frac{D_5^2}{4}$
Gewichtskraft: $F_g = m \cdot g$

Die Kraft aufgrund des Wasserdrucks $p(r)$ muss in den Bereichen $r < \frac{D_4}{2}$ (konstante Druckverteilung) bzw. $\frac{D_4}{2} < r < \frac{D_5}{2}$ getrennt betrachtet werden:

$$F_{p(r)} = F_{p,r<\frac{D_4}{2}} + F_{p,\frac{D_4}{2}<r<\frac{D_5}{2}}$$

Um über die Bernoulli-Gleichung eine Beziehung für den Druck $p(r)$ ableiten zu können, muss die Strömungsgeschwindigkeit $c(r)$ bekannt sein. Diese lässt sich aus dem gegebenen Massenstrom $\dot{m}_5$ mit

$c_5 = \frac{\dot{m}_5}{\rho \cdot \pi \cdot D_5 \cdot b}$

und der Konti-Gleichung $\dot{m}(r) = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot b \cdot c(r) = \dot{m}_5$ zu $c(r) = \frac{D_5}{2} \cdot c_5 \cdot \frac{1}{r}$ bestimmen.

Bernoulli-Gleichung von r nach 5 für $\frac{D_4}{2} < r < \frac{D_5}{2}$:

$\frac{c(r)^2}{2} + \frac{p(r)}{\rho} = \frac{c_5^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$

$p(r) = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot c_5^2 \cdot [1 - (\frac{D_5}{2r})^2]$

Berechnung der Druckkräfte für beide Bereiche aus den Druckverteilungen:
$dF = p(r) \cdot dA$

$F_{p,r<\frac{D_4}{2}} = \int_0^{\frac{D_4}{2}} \cdot p_4 \cdot 2\pi \cdot r dr = [p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot c_5^2 \cdot (1 - (\frac{D_5}{D_4})^2)]\pi \frac{D_4^2}{4}$

$F_{p,\frac{D_4}{2}<r<\frac{D_5}{2}} = \int_{\frac{D_4}{2}}^{\frac{D_5}{2}} p(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr$ mit $p(r)$ siehe oben.

Aufgabe 3

3a)

Bei der Sondenmessung werden die Größen im Staupunkt vor der Sondenspitze gemessen. Dort ist das Fluid unbewegt. Daher gilt für die Größen in der freien Strömung:

$T_1 = \frac{T_0}{1+\frac{\kappa-1}{2}Ma^2} = \frac{353{,}15K}{1+\frac{0{,}4}{2}0{,}6^2} = \underline{\underline{329{,}43\ K}}$

$p_1 = \frac{p_0}{(1+\frac{\kappa-1}{2}Ma^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \frac{1{,}8 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}}{(1+\frac{0{,}4}{2} \cdot 0{,}6^2)^{3{,}5}} = \underline{\underline{1{,}4112 \cdot 10^5\ N/m^2}}$

3b)

$$c_1 = Ma_1\sqrt{\kappa R T_1} = 0,6 \cdot \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kgK} \cdot 333,15K} = 219,52 m/s$$

Da die statischen Drücke in den Querschnitten 1 und 2 gegeben sind und c_1 nun bekannt ist, lässt sich aus

$$\frac{p_2}{p_1} = [1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa}\frac{1}{RT_1}(c_2^2 - c_1^2)]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

die Strömungsgeschwindigkeit im Querschnitt 2 bestimmen:

$$\frac{\kappa-1}{2\kappa}\frac{1}{RT_1}(c_2^2 - c_1^2) = 1 - (\frac{p_2}{p_1})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} RT_1(1 - (\frac{p_2}{p_1})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}) + c_1^2} \\ &= \sqrt{\frac{2,8}{0,4} \cdot 287 \frac{J}{kgK} \cdot 333,15K \cdot (1 - (\frac{1,4}{1,5})^{\frac{0,4}{1,4}}) + (219,52 m/s)^2} \\ &= \underline{\underline{247,49\ m/s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa}\frac{1}{RT_1}(c_2^2 - c_1^2)) \\ &= 333,15K \cdot (1 - \frac{0,4}{2,8}\frac{1}{287\frac{J}{kgK}\cdot 333,15K}((247,49\frac{m}{s})^2 - (219,52\frac{m}{s})^2)) \\ &= \underline{\underline{326,65\ K}} \end{aligned}$$

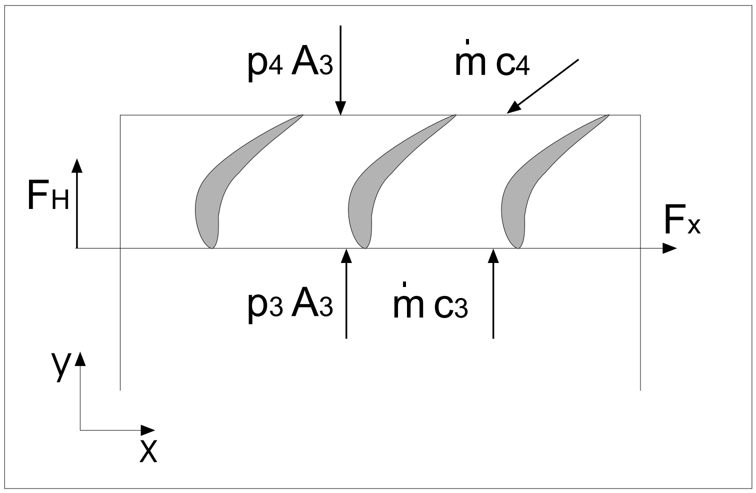
$$\dot m_2 = \rho_2 A_2 c_2 = \frac{p_2}{RT_2} b_1 b_2 c_2 = \frac{1,4\cdot 10^5 \frac{N}{m^2}}{287\frac{J}{kgK}\cdot 326,65K} \cdot 0,1388m \cdot 0,15m \cdot 247,49m = \underline{\underline{7,75\ kg/s}}$$

3c)

<u>Konti-Gleichung:</u> $\dot m_1 = \dot m_4 \implies \rho_1 A_1 c_1 = \rho_4 A_4 c_4$

$$\frac{A_1}{A_4} = \frac{\rho_4}{\rho_1}\frac{c_4}{c_1} = \frac{p_4 RT_1}{RT_4 p_1}\frac{\sqrt{\kappa RT_4}}{Ma_1\sqrt{\kappa RT_1}} = \frac{1,013}{1,50}\frac{1}{0,6}\sqrt{\frac{333,15K}{297,61K}} = 1,1909$$

KGG am Gitter / Impulsbilanz:



x-Richtung: keine Komponente in x-Richtung, die aus dem Druck herrührt

$\sum F_x = 0 = F_x - \dot{m}_4 c_4 cos\alpha$ mit $c_4 = \sqrt{\kappa R T_4} = 345,80 m/s$

$F_x = 10\frac{kg}{s} \cdot 345,80\frac{m}{s} \cdot cos 20° = \underline{\underline{3249,5\ N}}$

y-Richtung:

$F_y = 0 = F_H + p_3 A_3 - p_4 A_3 + \dot{m} c_3 - \dot{m} c_4 sin\alpha$

$$\begin{aligned} F_H &= (p_4 - p_3)A_3 + \dot{m}(c_4 sin\alpha - c_3) \\ &= (1,013 - 1,50) \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot (0,15m)^2 + 10\frac{kg}{s} \cdot (345,80\frac{m}{s} \cdot sin 20° - 219,52\frac{m}{s}) \\ &= \underline{\underline{-2108,2\ N}} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

4a)

$\dot{m} = \rho \cdot A_s \cdot c = \rho \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot c$

$\dot{m}_a = \rho \cdot \mu \cdot A_s \cdot c = \mu \cdot \dot{m} = \frac{2}{3} \cdot 2,2\frac{kg}{s} = \underline{\underline{1,47\ kg/s}}$
$\dot{m}_b = (1-\mu) \cdot \dot{m} = \frac{1}{3} \cdot 2,2\frac{kg}{s} = \underline{\underline{0,73\ kg/s}}$

Impulssatz in x-Richtung: $\dot{m} \cdot c - F_H - \dot{m}_a \cdot c \cdot cos\alpha = 0$
Impulssatz in y-Richtung: $\dot{m}_a \cdot c \cdot sin\alpha - \dot{m}_b \cdot c = 0$

$\dot{m}_a \cdot sin\alpha = \dot{m}_b$

$sin\alpha = \frac{\dot{m}_b}{\dot{m}_a} = \frac{1-\mu}{\mu} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 30°}}$

Aus der Impulsbilanz in x-Richtung lässt sich nun F_H ermitteln:

$$\begin{aligned} F_H &= \dot{m} \cdot c - \mu \cdot \dot{m} \cdot c \cdot cos\alpha \\ &= \dot{m} \cdot c \cdot (1 - \mu \cdot cos\alpha) = \frac{\dot{m}^2}{\rho A_s} \cdot (1 - \mu \cdot cos\alpha) \\ &= \frac{(2,2\frac{kg}{s})^2 \cdot 4}{1000\frac{kg}{s} \cdot \pi \cdot (0,02m)^2}(1 - \frac{2}{3} \cdot cos30°) = \underline{\underline{6,51\ N}} \end{aligned}$$

4b)

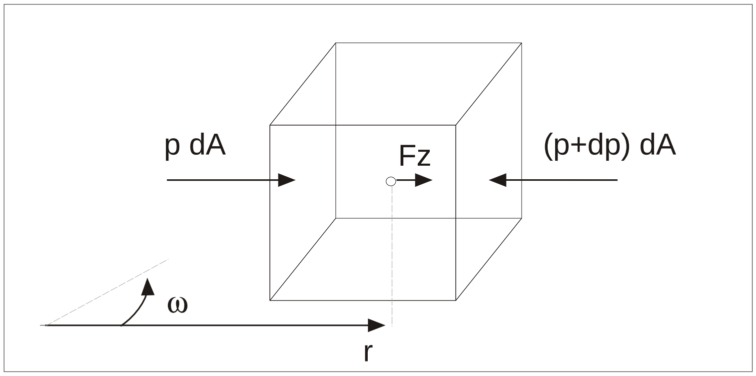
$p(r, h^*) =?$

<u>Kräftegleichgewicht am Fluidelement:</u>

$\sum F_r = p \cdot dA - (p + dp) \cdot dA + dm \cdot a = 0$ mit $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$

$dp \cdot dA = dm \cdot \omega^2 \cdot r$

Mit $dm = \rho \cdot dr \cdot dA$ ergibt sich:



$\frac{dp}{dr} = \rho \cdot \omega^2 \cdot r \quad \Longrightarrow \quad p(r) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 + K$

Randbedingung aus der Hydrostatik: $g \cdot h_1 + \frac{p_u}{\rho} = g \cdot h^* + \frac{p^*}{\rho}$

$p^* = p(r = 0, h^*) = K = p_u + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h^*)$

$\underline{\underline{p(r, h^*) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 + p_u + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h^*)}}$

4c)

Wassersäule muss h_3 erreichen: Bernoulli von * nach 3

$g \cdot h_3 + \frac{p_3}{\rho} + \frac{c_3^2}{2} = g \cdot h^* + \frac{p(r=R)}{\rho} + \frac{c^{*2}}{2}$

Mit $c^* = 0$, $c_3 = 0$, $p_3 = p_u$ und $p(r = R)$ aus Aufgabenteil b):

$g \cdot h_3 + \frac{p_u}{\rho} = g \cdot h^* + \frac{p_u}{\rho} + \frac{1}{2}\omega_{krit}^2 \cdot R^2 + g \cdot (h_1 - h^*)$

$\frac{1}{2}\omega_{krit}^2 \cdot R^2 = g \cdot (h_3 - h_1)$

$\omega_{krit} = \frac{\sqrt{2g \cdot (h_3 - h_1)}}{R} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot (3{,}2m - 1{,}5m)}}{1m} = \underline{\underline{5,78\ s^{-1}}}$