

# Klausur Herbst 2004

## „Strömungsmechanik I“

**Bearbeitungsdauer: PO 2000 : 90 min**

**zugelassene Hilfsmittel:**

Taschenrechner  
Formelsammlung-IfS, ohne handschriftliche Ergänzungen  
Lineal und Schreibmaterial  
mitgebrachtes Papier

**weitere Hinweise:**

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen  
Die zu verwendenden Indices sind (soweit gegeben) den Skizzen  
zu entnehmen.

Name	Vorname	Matr. Nummer

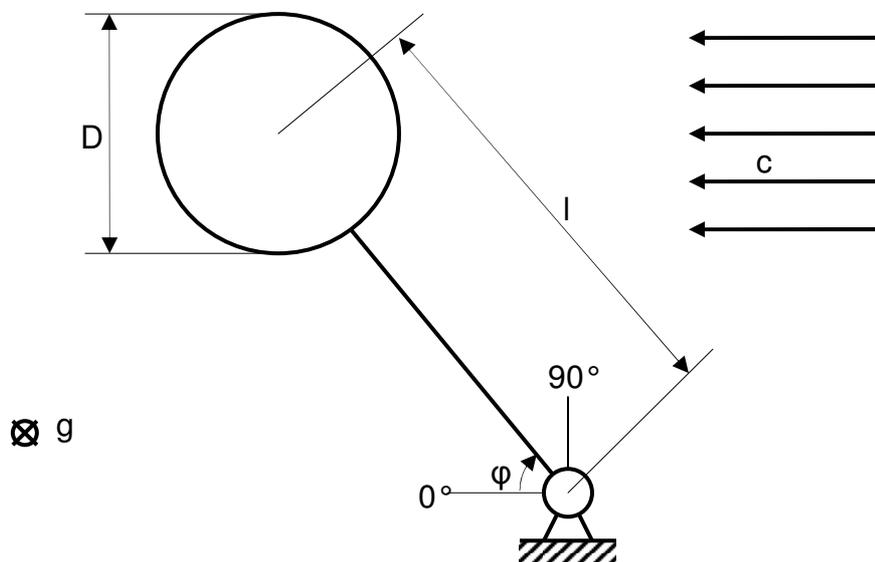
	mögliche Punktezahl	erreichte Punktezahl
<b>Aufgabe 1</b>	<b>26</b>	
<b>Aufgabe 2</b>	<b>35</b>	
<b>Aufgabe 3</b>	<b>28</b>	
<b>Gesamt</b>	<b>89</b>	
	<b>Note</b>	

**Viel Erfolg!**

## Aufgabe 1 - Kurzfragen (26 Punkte)

### Kurzfrage a

Eine Kugel mit dem Durchmesser  $D$  befindet sich in einem Windkanal. Die Anströmgeschwindigkeit  $c_\infty$  wird langsam bis zum Erreichen der kritischen Reynoldszahl gesteigert. Dabei wird die Kugel um den Winkel  $\varphi_1$  ausgelenkt. Die Kugel ist über eine Stange der Länge  $l$  befestigt, diese stützt sich an der Kanalwand über eine Drehfeder der Steifigkeit  $c_\varphi$  ab. Durch eine kleine Störung der Anströmung wird der laminar-turbulente Umschlag herbeigeführt, so dass die Kugel nur noch um den Winkel  $\varphi_2$  ausgelenkt. Bei  $90^\circ$  ist die Feder entlastet.

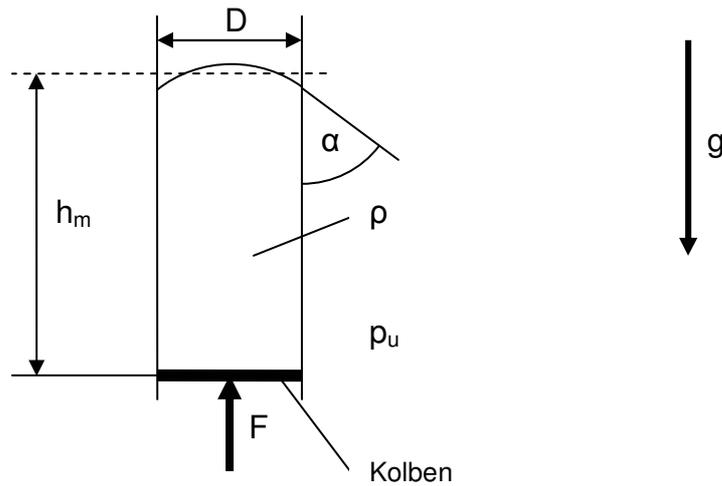


Berechnen Sie die beiden Widerstandsbeiwerte der Kugel und erklären Sie den Sachverhalt. (12 Punkte)

Gegeben:  $D = 13 \text{ cm}$        $l = 40 \text{ cm}$        $Re_{\text{krit}} = 3,4 \cdot 10^5$   
 $c_\varphi = 1 \text{ Nm/}^\circ$        $\varphi_1 = 54^\circ$        $\varphi_2 = 72^\circ$   
 $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$        $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$

### Kurzfrage b

In einem Glaskolben steht eine Flüssigkeit bis zur Höhe  $h_m$ . Am unteren Ende befindet sich ein Kolben. Die Kapillarwirkung darf nicht vernachlässigt werden.

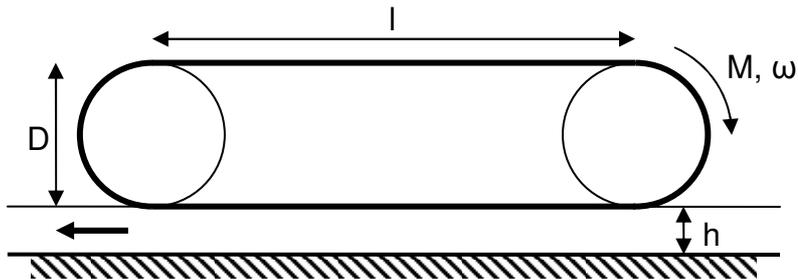


Wie groß ist die Kraft, mit der der Kolben belastet wird? (7 Punkte)

Gegeben:  $D = 0,15 \text{ cm}$        $\rho = 870 \text{ kg/m}^3$        $h_m = 80 \text{ cm}$   
 $\alpha = 50^\circ$        $\sigma = 0,078 \text{ N/m}$        $g = 9,81 \text{ m/s}^2$   
 $p_u = 1013 \text{ mbar}$

### Kurzfrage c

Ein Förderband der effektiven Länge  $l$  und Breite  $b$  wird durch zwei Walzen des Durchmessers  $D$  angetrieben. Zwischen der unteren Bandhälfte und einer Grundplatte wird ein dünner Film von Druckfarbe gefördert. Der Antrieb arbeite mit dem Wirkungsgrad  $\eta$  und die Dicke des Transportbandes ist vernachlässigbar.



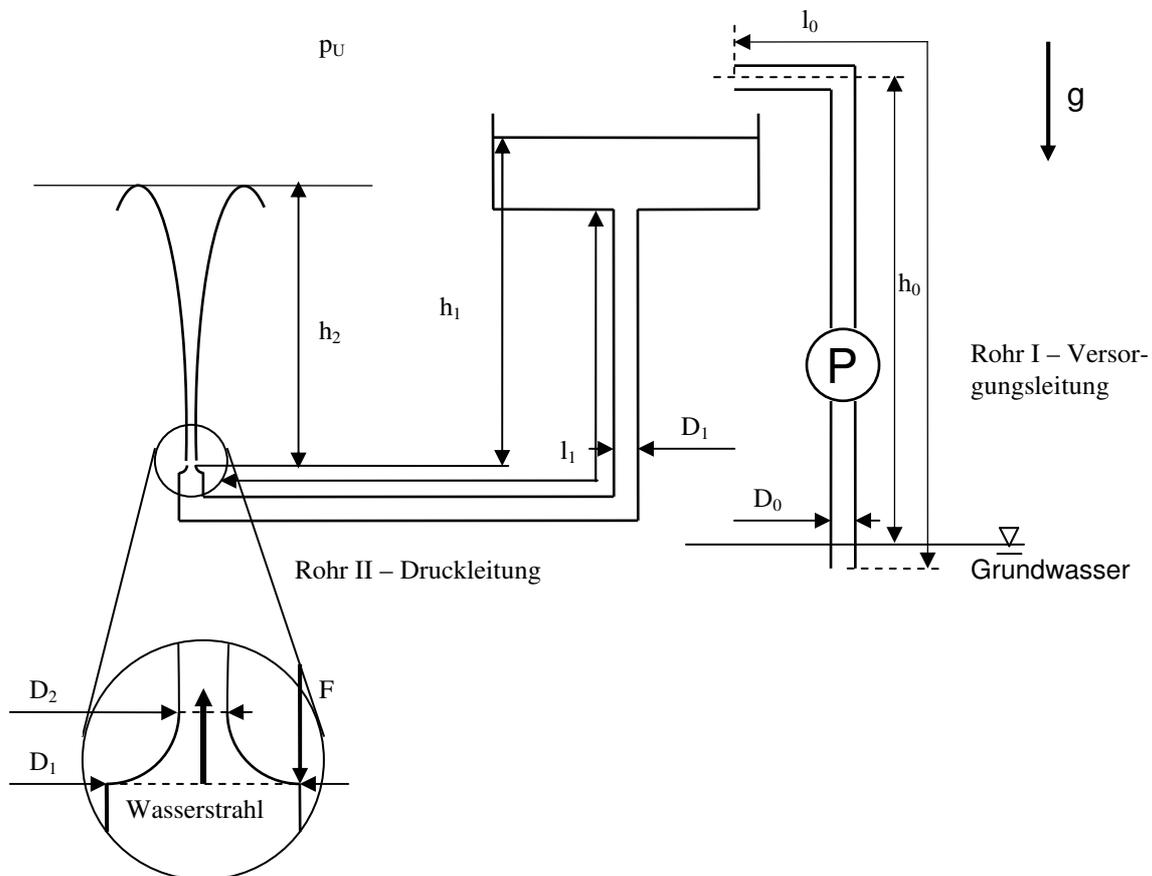
Gegeben:  $h = 0,15 \text{ cm}$        $D = 40 \text{ cm}$        $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$   
 $l = 0,6 \text{ m}$        $b = 1,5 \text{ m}$        $\rho = 1340 \text{ kg/m}^3$   
 $\nu = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$        $\eta = 0,8$

Berechnen Sie die Antriebsleistung und den geförderten Massenstrom. (7 Punkte)

## Aufgabe 2 (35 Punkte)

Gegeben ist ein Springbrunnen, der über einen Hochbehälter gespeist wird. Der Hochbehälter wird über eine Versorgungsleitung mit einer Pumpe versorgt, die das Wasser aus einem Grundwasserreservoir hinaufpumpt. Die Strömung in der Versorgungsleitung sei reibungsbehaftet. Das Grundwasserreservoir kann als unendlich groß angesehen werden. Aus dem Hochbehälter fließt das Wasser über eine Druckleitung zur Springbrunnendüse. Für den Ausflussvorgang kann das Volumen des Hochbehälters als konstant angesehen werden. Die Strömung in der Druckleitung sei reibungsbehaftet.

Gegeben:	<u>allgemein:</u>	<u>Versorgungsleitung:</u>	<u>Düse:</u>
	$p_U = 1,013 \text{ bar}$ $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ $\rho_{\text{Wasser}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ $\nu_{\text{Wasser}} = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$D_0 = 0,05 \text{ m}$ $h_0 = 12 \text{ m}$ $l_0 = 15 \text{ m}$ $dp_V/l = 100 \text{ mbar/m}$	$D_2 = 0,025 \text{ m}$ $D_1 = 0,05 \text{ m}$
	<u>Hochbehälter:</u>	<u>Pumpe:</u>	<u>Druckleitung:</u>
	$V = 12,5 \text{ m}^3$ $h_1 = 8 \text{ m}$	$\eta = 0,75$	$l_1 = 20 \text{ m}$ $dp_V/l = 25 \text{ mbar/m}$



- a) Berechnen Sie die nötige elektrische Anschlussleistung der Pumpe, um den Hochbehälter in 15 min zu füllen. Wie groß ist die Sandkornrauigkeit  $k_s$  des Rohres I ? (10 Punkte)
- b) Berechnen Sie die Ausströmgeschwindigkeit an der Düse. Der große Durchmesser der Düse  $D_1$  ist auch der des Rohres II. Der Austrittsdurchmesser der Düse beträgt  $D_2$ . Wie groß ist der Druckverlust in der Druckleitung? Die Strömung sei hydraulisch glatt. Wie groß ist Rohrreibungszahl  $\lambda$ ? (8 Punkte)
- c) Welche Haltekraft muss an der Düse aufgewendet werden? Die Höhe der Düse ist vernachlässigbar klein und die Reibung in der Düse kann auch vernachlässigt werden. (7 Punkte)
- d) Welche Höhe  $h_2$  erreicht der Springbrunnen? Der Freistrahls sei reibungsfrei. Es kann ein Stromfaden vom Austritt der Düse bis zum höchsten Punkt des Freistrahls angenommen werden. (3 Punkte)
- e) Welcher Unterdruck muss in einem geschlossenen Hochbehälter erzeugt werden, damit der Springbrunnen nur noch eine Höhe von  $h_{2^*} = 1$  m erreicht? Der Hochbehälter wird nur für diesen Aufgabenteil verschlossen. Der Freistrahls sei weiterhin reibungsfrei. Die Rohrströmung kann als hydraulisch glatt angesehen werden. (9 Punkte)

### Aufgabe 3 (30 Punkte)

Gegeben ist ein großer Druckbehälter (konstanter Ruhezustand:  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho_0$ ), aus dem Helium (ideales Gas,  $c_p$ ,  $\kappa$ ) isentrop und stationär durch eine Lavaldüse ausströmt. Die Düse wird im Auslegungspunkt betrieben, d. h. es findet eine vollständige Expansion von  $p_0$  auf  $p_U$  statt.

Gegeben:

Helium:

$$c_p = 5,24 \text{ kJ/kgK}$$

$$\kappa = 5/3$$

Düse:

$$p_U = p_1 = 1,013 \text{ bar}$$

$$\rho^* = 0,4 \text{ kg/m}^3$$

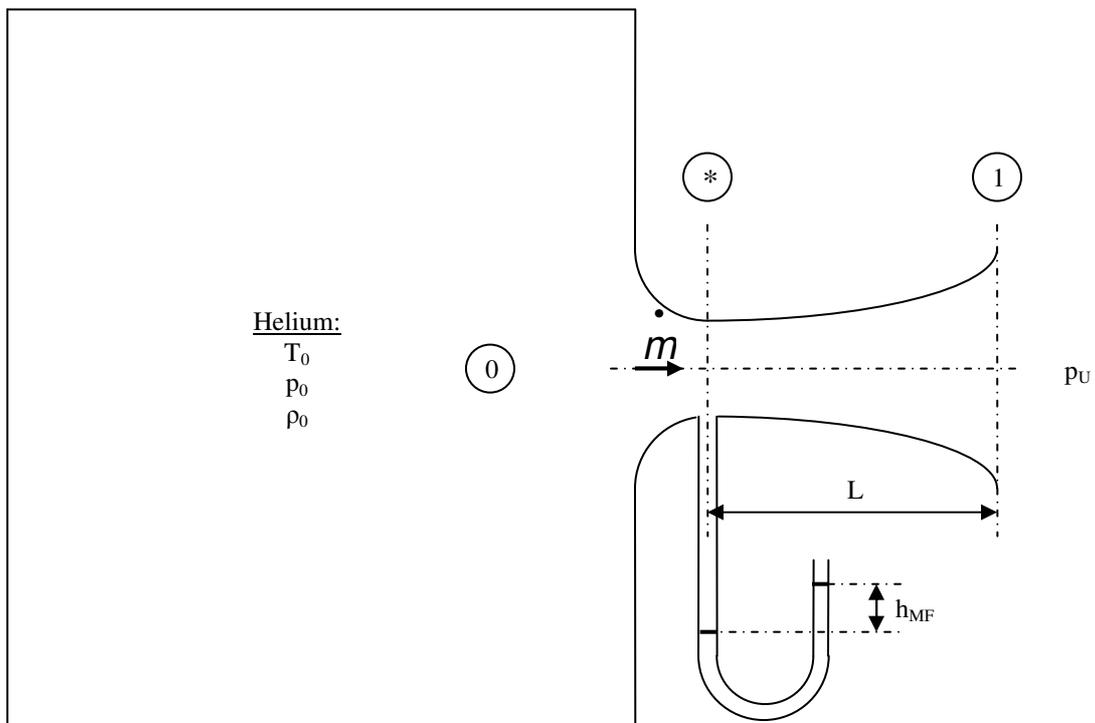
$$d^* = 5 \text{ cm}$$

$$L = 30 \text{ cm}$$

Messflüssigkeit:

$$h_{MF} = 1 \text{ m}$$

$$\rho_{MF} = 1050 \text{ kg/m}^3$$



- Berechnen Sie  $p^*$ ,  $T^*$ , im engsten Querschnitt und  $\dot{m}$ . (6 Punkte)
- Wie groß sind  $T_0$ ,  $p_0$  und  $\rho_0$ ? (3 Punkte)
- Wie groß ist die Geschwindigkeit am Ende der Düse? Wie muss der Austrittsdurchmesser der Düse gewählt werden, damit eine vollständige Expansion stattfindet? Wie groß ist die Umgebungstemperatur? (7 Punkte)
- Wie viel Kraft übt der Behälter auf die Umgebung aus? (2 Punkte)
- Die Düse wird an der Stelle des engsten Querschnitts abgeschnitten, so dass man eine konvergente Düse erhält. Die Umgebungsgrößen bleiben unverändert.

Wie groß ist nun der austretende Massenstrom? Wie groß ist die Kraft der Düse auf die Umgebung? Auf welchen Druck ließe sich der Behälterdruck absenken, ohne dass die Austrittsgeschwindigkeit verändert wird? (7 Punkte)

f) Lässt sich durch eine Vergrößerung oder durch eine Verkleinerung der Düsenquerschnittsfläche die Kraft auf den Behälter erhöhen? Begründung! (3 Punkte)

## Musterlösung Klausur F 2004

### Kurzfrage 1a)

$$\text{Re}_{krit} = \frac{c_{\infty} D}{\nu}$$

$$c_{\infty} = \frac{\text{Re}_{krit} \nu}{D} = \frac{3,4 \cdot 10^5 * 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{0,13 \text{ m} \cdot \text{ s}} = \underline{\underline{39,23 \text{ m/s}}}$$

$$F_{lam} = \frac{c_{\varphi} \cdot (90^{\circ} - \varphi_1)}{1 \cdot \sin \varphi_1} = \frac{1 \text{ Nm} \cdot (90 - 54)}{0,4 \text{ m} \cdot \sin 54^{\circ}} = \underline{\underline{111,25 \text{ N}}}$$

$$F_R = c_W \frac{\rho}{2} u_{\infty}^2 A$$

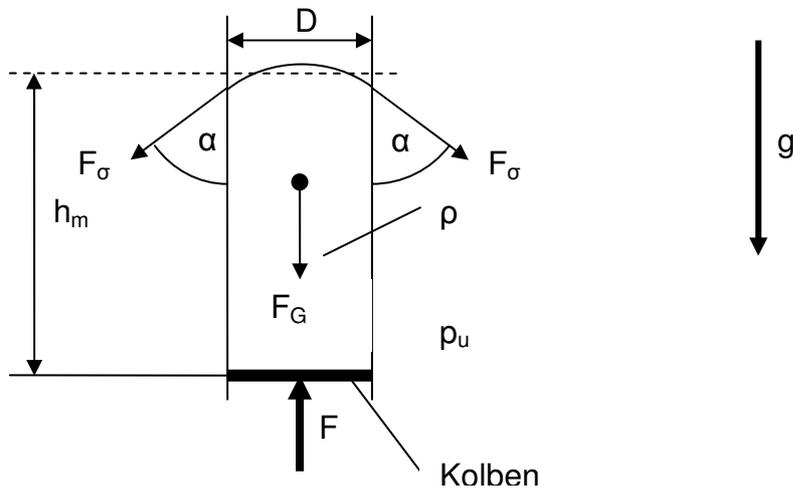
$$c_{W_{lam}} = \frac{2F_{lam}}{c_{\infty}^2 \rho A} = \frac{2 \cdot 72,81 \cdot 4}{39,23^2 \cdot 1,225 \cdot \pi \cdot 0,13^2} = \underline{\underline{5,82}}$$

$$F_{turb} = \frac{c_{\varphi} \cdot (90^{\circ} - \varphi_2)}{1 \cdot \sin \varphi_2} = \frac{1 \text{ Nm} \cdot (90 - 72)}{0,4 \text{ m} \cdot \sin 72^{\circ}} = \underline{\underline{47,31 \text{ N}}}$$

$$c_{W_{turb}} = \frac{2F_{turb}}{c_{\infty}^2 \rho A} = \frac{2 \cdot 42,8 \cdot 4}{39,23^2 \cdot 1,225 \cdot \pi \cdot 0,13^2} = \underline{\underline{3,42}}$$

Aufgrund des geringeren Totwassergebiets; kleinerer Druckwiderstand;

### Kurzfrage 1b)



KGG in vertikaler Richtung:

$$F = F_\sigma \cdot \cos \alpha + F_G$$

$$F_\sigma = \sigma \cdot \pi \cdot D = 0,078 \cdot \pi \cdot 0,0015 \text{ N} = \underline{0,00037 \text{ N}}$$

$$F_G = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot h_m \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot g =$$

$$F_G = 870 \cdot 9,81 \cdot 0,8 \cdot \frac{\pi \cdot 0,0015^2}{4} \text{ N} = \underline{0,012 \text{ N}}$$

$$F = F_\sigma \cdot \cos \alpha + F_G = 0,00037 \cdot \cos 50^\circ + 0,012 \text{ N} = \underline{\underline{0,01224 \text{ N}}}$$

**Kurzfrage 1c)**

$$U = \omega \cdot \frac{D}{2} = 1 \cdot \frac{0,4m}{2s} = \underline{0,2 m/s}$$

$$F = \tau_w \cdot b \cdot l = \eta \left( \frac{du}{dy} \right)_w \cdot b \cdot l = \nu \cdot \rho \cdot \frac{U}{h} \cdot b \cdot l$$

$$F = 3 \cdot 10^{-4} \cdot 1340 \cdot \frac{0,2}{0,0015} \cdot 1,5 \cdot 0,6N = \underline{48,24N}$$

$$M = F \cdot \frac{D}{2} = 48,24 \cdot \frac{0,4}{2} Nm = \underline{9,648Nm}$$

$$P = \frac{M \cdot \omega}{\eta} = \frac{9,648 \cdot 1}{0,8} Nm/s = \underline{\underline{12,06W}}$$

$$\dot{m} = \rho \cdot \int u dA = \rho \cdot \int_0^h \frac{U}{h} \cdot y \cdot b \cdot dy = \frac{\rho \cdot b \cdot U}{h} \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^h$$

$$\dot{m} = \frac{\rho \cdot U \cdot b \cdot h}{2} = \frac{1340 \cdot 0,2 \cdot 1,5 \cdot 0,0015}{2} = \underline{\underline{0,3015 kg/s}}$$



b) Bernoulli von 1 nach 2

$$\frac{\cancel{c_1^2}}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{\Delta p_{V12}}{\rho}$$

$$\Delta p_{V12} = \frac{\Delta p_v}{l} \cdot l = 2500 \cdot 20 \text{ Pa} = \underline{\underline{50 \text{ kPa}}}$$

$$c_2 = \sqrt{2 \left( gh_1 - \frac{\Delta p_{V12}}{\rho} \right)} = \sqrt{2 \left( 9,81 \cdot 8 - \frac{50000}{1000} \right)} \text{ m/s} = \underline{\underline{7,55 \text{ m/s}}}$$

$$\dot{m} = A_2 c_2 \rho = A_1 c_1 \rho$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{A_2}{A_1} c_2 = \frac{D_2^2}{D_1^2} c_2 = \frac{0,025^2}{0,05^2} 7,55 \text{ m/s} = \underline{\underline{1,89 \text{ m/s}}}$$

$$\text{Re} = \frac{c_1 D_1}{\nu} = \frac{1,89 \cdot 0,05}{1,0 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{9,44 \cdot 10^4}}$$

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{1/4}} = \underline{\underline{0,018}}$$

c) Bernoulli von Hochbehälter bis vor Düse

$$\frac{c_{2^*}^2}{2} + \frac{p_{2^*}}{\rho} + gz_2 + \frac{\Delta p_{V12}}{\rho} = \frac{\cancel{c_1^2}}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$$

$$p_{2^*} = p_U - \Delta p_V + \rho \left( gh_1 - \frac{c_{2^*}^2}{2} \right)$$

$$p_{2^*} = 101300 - 50000 + 1000 \cdot \left( 9,81 \cdot 8 - \frac{1,89^2}{2} \right) Pa$$

$$p_{2^*} = \underline{128000 Pa}$$

Oder Bernoulli von hinter Düse bis vor Düse

$$\frac{c_{2^*}^2}{2} + \frac{p_{2^*}}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

$$\Rightarrow p_{2^*} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \rho + p_U = \frac{7,55^2 - 1,89^2}{2} 1000 + 101300 Pa$$

$$p_{2^*} = \underline{128000 Pa}$$

$$\dot{m} = A_1 c_1 \rho = \frac{\pi}{4} 0,05^2 \cdot 1,89 \cdot 10^3 \frac{kg}{s} = \underline{3,71 \frac{kg}{s}}$$

Impulssatz:

$$\sum_{y \uparrow +} F_y = 0 = p_{2^*} A_1 + c_{2^*} \dot{m} - p_U A_1 - c_2 \dot{m} - F$$

$$F = A_1 (p_{2^*} - p_U) + \dot{m} (c_1 - c_2) = \frac{\pi D_1^2}{4} (p_{2^*} - p_U) + \dot{m} (c_1 - c_2)$$

$$F = \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} (128000 - 101300) + 3,71 (1,89 - 7,55) N$$

$$F = \underline{31,43 N}$$

d) Bernoulli von Düsenaustritt zum höchsten Punkt

$$\frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$$

$$h_2 = \frac{c_2^2}{2g} = \frac{7,55^2}{2 \cdot 9,81} \text{ m} = \underline{\underline{2,9 \text{ m}}}$$

e) neues  $c_2$ :

$$\frac{c_{2+}^2}{2} + \frac{p_{2+}}{\rho} + gz_{2+} = \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$$

$$c_{2+} = \sqrt{2gh_{2+}} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} \text{ m/s} = \underline{\underline{4,43 \text{ m/s}}}$$

neuer Druckverlust:

$$\dot{m} = A_2 c_2 \rho = A_1 c_1 \rho$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{A_2}{A_1} c_2 = \frac{D_2^2}{D_1^2} c_2 = \frac{0,025^2}{0,05^2} 4,43 \text{ m/s} = \underline{\underline{1,11 \text{ m/s}}}$$

$$\text{Re} = \frac{c_2 D_2}{\nu} = \frac{1,11 \cdot 0,05}{10 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{5,5 \cdot 10^4}}$$

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{1/4}} = \underline{\underline{0,0206}}$$

$$\Delta p_v = \frac{\lambda \rho c_1^2}{2D_1} = \frac{0,0206 \cdot 20 \cdot 1000 \cdot 1,11^2}{2 \cdot 0,05} \text{ Pa} = \underline{\underline{5076 \text{ Pa}}}$$

$$\frac{c_{2^*}^2}{2} + \frac{p_{2^*}}{\rho} + gz_3 + \frac{\Delta p_V}{\rho} = \frac{c_1^2}{\cancel{2}} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$$

$\cancel{=0}$

$$p_1 = p_U + \Delta p_V - \rho \left( gh_1 - \frac{c_{2^*}^2}{2} \right)$$

$$p_1 = 101300 + 5076 - 1000 \cdot \left( 9,81 \cdot 8 - \frac{4,43^2}{2} \right) Pa$$

$$p_1 = \underline{\underline{37708 Pa}}$$

Aufgabe 3)

$$a) \quad p^* = p_U + gh_{MF} \rho_{MF} = 101300 + 9,81 \cdot 1 \cdot 1050 \text{ Pa}$$

$$p^* = \underline{\underline{111600 \text{ Pa}}}$$

$$R = c_p \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \frac{5/3 - 1}{5/3} \cdot 5,24 \text{ kJ/kgK} = \underline{\underline{2096 \text{ J/kgK}}}$$

$$\frac{p^*}{\rho^*} = RT^* \Rightarrow T^* = \frac{p^*}{R\rho^*} = \frac{111600}{2096 \cdot 0,4} \text{ K} = \underline{\underline{133,1 \text{ K}}}$$

$$c^* = \sqrt{\kappa RT^*} = \sqrt{5/3 \cdot 2096 \cdot 133,1} \text{ m/s} = \underline{\underline{682 \text{ m/s}}}$$

$$\dot{m} = A^* c^* \rho^* = \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} 682 \cdot 0,4 \text{ kg/s} = \underline{\underline{0,53 \text{ kg/s}}}$$

$$b) \quad T_0 = T^* \frac{\kappa + 1}{2} = 133,1 \frac{5/3 + 1}{2} \text{ K} = \underline{\underline{177,5 \text{ K}}}$$

$$p_0 = p^* \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 111600 \left( \frac{5/3 + 1}{2} \right)^{2,5} \text{ Pa}$$

$$p_0 = \underline{\underline{229093 \text{ Pa}}}$$

$$\rho_0 = \rho^* \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = 0,4 \left( \frac{4}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ kg/m}^3 = \underline{\underline{0,616 \text{ kg/m}^3}}$$

c)

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{\rho_0}{\rho_0} (c_1^2 - c_0^2)\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$c_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\rho_1}{\rho_0}}{\frac{\rho_0}{\rho_0}} \frac{2\kappa}{\kappa-1}\right) \frac{229093}{0,616} \frac{5}{5} \frac{m}{s}}$$

$$c_1 = \underline{\underline{719,6 \frac{m}{s}}}$$

$$\rho_1 = \rho_0 \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{\rho_0}{\rho_0} c_1^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = 0,616 \left(1 - 0,2 \frac{0,616}{229093} 719,6^2\right)^{1,5} \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_1 = 0,377 \frac{kg}{m^3}$$

$$\dot{m} = A_1 c_1 \rho_1 \Rightarrow d_1 = \sqrt{\frac{4 \dot{m}}{\pi c_1 \rho_1}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,53}{\pi \cdot 719,6 \cdot 0,377}} m = \underline{\underline{0,0564 m}}$$

$$T_1 = T_0 \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{\rho_0}{\rho_0} c_1^2\right) = 177,5 \left(1 - 0,2 \frac{0,616}{229093} 719,6^2\right) K$$

$$\underline{\underline{T_1 = 128 K}}$$

d) Impulssatz

$$\sum_{\leftarrow+} F_y = 0 = F - \dot{m} \cdot c_2 \Rightarrow F = \dot{m} \cdot c_2 = 0,53 \cdot 719,6 N = \underline{\underline{381,4 N}}$$

e) entweder mit  $\pi_{krit}$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} RT_0 \left[1 - (\pi_{krit})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} = \sqrt{5 \cdot 2096 \cdot 177,5 \left[1 - \frac{2}{\kappa+1}\right]} \frac{m}{s}$$

$$c_1 = \underline{\underline{682 \frac{m}{s}}}$$

oder über lokale Schallgeschwindigkeit

$$a = \sqrt{\kappa RT^*} = \sqrt{\frac{5}{3} 2096 \cdot 133,1} \frac{m}{s} = \underline{\underline{682 \frac{m}{s}}}$$

Massenstrom bleibt gleich

$$\sum_{\leftarrow+} F_y = 0 = F - \dot{m} \cdot c_2 \Rightarrow F = \dot{m} \cdot c_2 = 0,53 \cdot 682 \text{ N} = \underline{\underline{361,5 \text{ N}}}$$

$$p_0 = \frac{p_U}{\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \frac{101300}{0,75^{2,5}} \text{ Pa} = \underline{\underline{207950 \text{ Pa}}}$$

- f) c ist nur Druckabhängig, daher m. hängt von Fläche ab, daher A größer auch F größer.