Universität Hannover
Institut für Strömungsmaschinen
Prof. Dr.-Ing. J .Seume

Klausur Herbst 2005

„Strömungsmechanik I“

Bearbeitungsdauer **PO 2000: 90 min**

zugelassene Hilfsmittel:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- IfS-Formelsammlung (ohne handschriftliche Ergänzungen)
- Lineal und Schreibmaterial
- mitgebrachtes Papier

weitere Hinweise: Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indices sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.
Beschriften Sie jedes Blatt mit Name und Matrikelnr.

Name	Vorname	Matr. Nummer

	mögliche Punktezahl	erreichte Punktezahl
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Gesamt		
	Note	

!!Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar!!

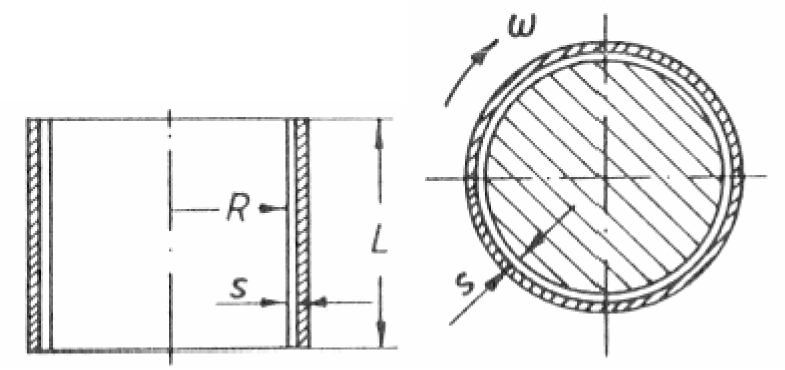
Viel Erfolg!

Kurzaufgabe 1a.)

Zwischen einem inneren Zylinder mit dem Radius R und der Höhe L und einem koaxialen äußeren Zylinder befindet sich ein schmaler Spalt von der Breite s, der mit einer Newtonschen Flüssigkeit gefüllt ist (s. Abb.). Welches Haltedrehmoment M muss am inneren Zylinder angreifen, wenn dieser in Ruhe bleiben soll, während sich der äußere Zylinder mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht?

Hinweis: Wegen s<<R kann angenommen werden, dass die Strömung im gekrümmten Spalt der Couette-Strömung (linearer Verlauf der Geschwindigkeit) zwischen zwei ebenen Platten gleich ist.

Gegeben: R = 5cm; s = 0,2cm; L = 20cm; ω = 5Hz; η = $50\cdot10^{-3}$Pa·s



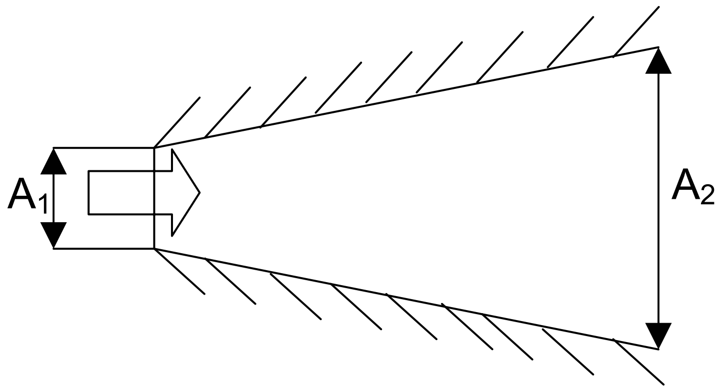
Kurzaufgabe 1b.)

Ein Kompressor fördert 30m³/min Luft von 0°C und 1bar und verdichtet diese Luft auf einen Enddruck von 4bar. Die Temperatur nach der Verdichtung betrage 75°C. Gefragt ist nach der Größe des Querschnitts eines Sicherheitsventils, durch das die gesamte geförderte Luftmenge mit Sicherheitsreserve (Ma=0,8) ausströmen kann.
Das Fluid ist als ideales, kompressibles und isentropes Gas zu betrachten.
Gegeben: κ=1,4; $R_{i,Luft}$=287 J/(kg·K)

Kurzaufgabe 1c.)

Im Verlauf eines Diffusors (s. Abb.) wird dynamischer Druck in statischen Druck unter gleichzeitiger Verlangsamung des Fluids umgesetzt. Der ideale Druckbeiwert c_p ist dabei definiert als statische Druckdifferenz zwischen Aus- und Eintritt bezogen auf die kinetische Energie am Eintritt:

$$c_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{\rho}{2} \cdot c_1^2}$$

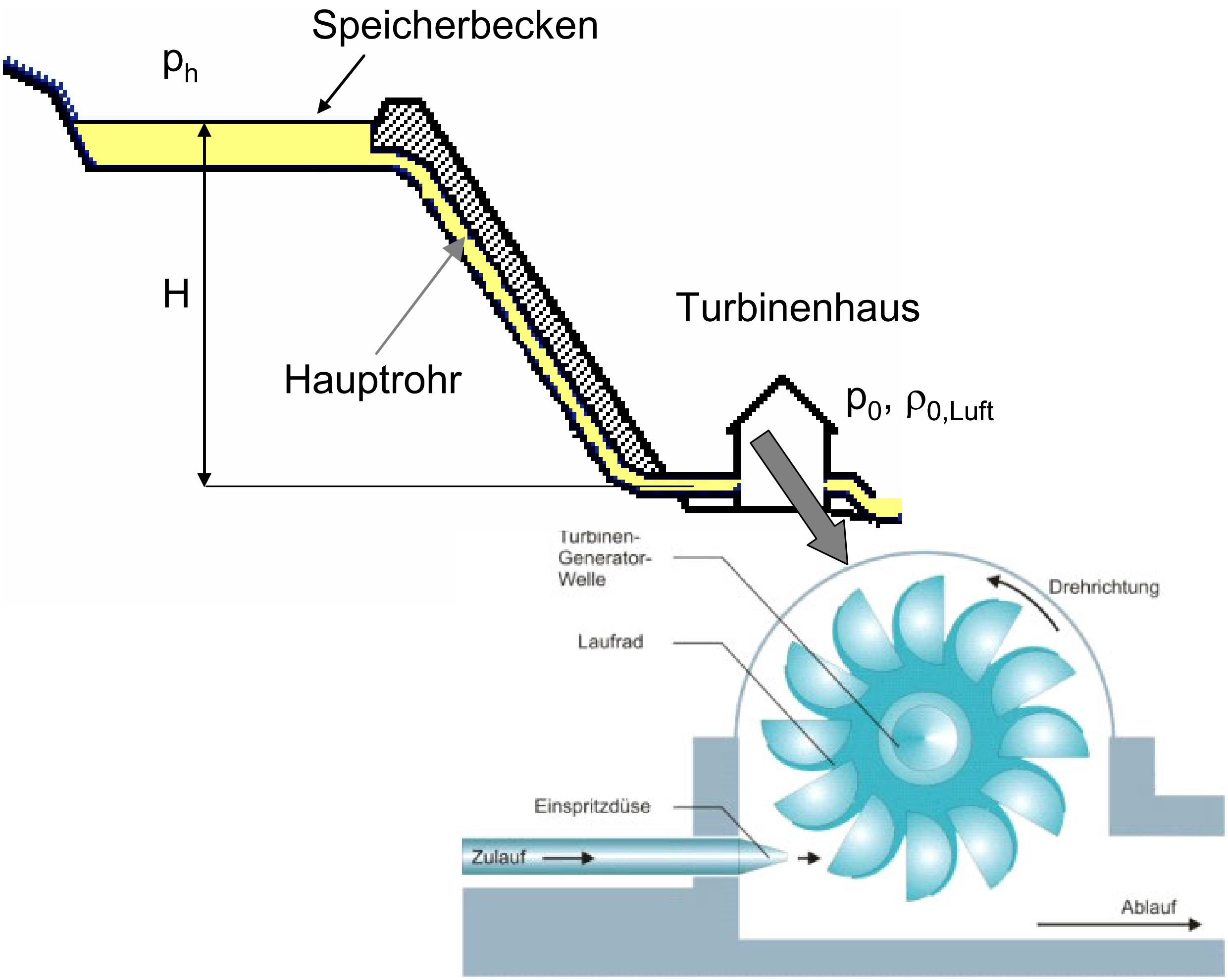


Zeigen Sie für eine reibungsfreie, eindimensionale und inkompressible Strömung, dass der ideale Druckbeiwert c_p nur eine Funktion des Flächenverhältnisses $AR=A_2/A_1$ (**A**rea **R**atio) ist.

Gegeben: A_1; A_2

Aufgabe 2.)

Mit dem abfließenden Wasser eines Speicherbeckens wird eine Pelton-Turbine mit großer Leistung angetrieben. Eine Einspritzdüse dient zum Antrieb des Turbinenlaufrades (siehe Abb.). Die Höhe des Speicherbeckens kann für alle Aufgabenteile als konstant angenommen werden.



2.1) Berechnen Sie den Massenstrom, der aus der Einspritzdüse austritt. Das Fluid ströme reibungsfrei. Zwischen dem Stausee und dem Turbinenhaus ist die Änderung des Umgebungsdruckes über die barometrische Höhenformel zu berücksichtigen. Das Fluid sei inkompressibel.

Barometrische Höhenformel: $p(h) = p_0 \cdot e^{\left(-\frac{\rho_{0,Luft}\cdot g}{p_0}\cdot h\right)}$

Gegeben für Teil 1: p(h); p_0=1bar; H=900m; $A_{Düse}$=0,02m²; ρ_{Wasser}=1000kg/m³; g=9,81m/s²; $\rho_{0,Luft}$=1,2kg/m³

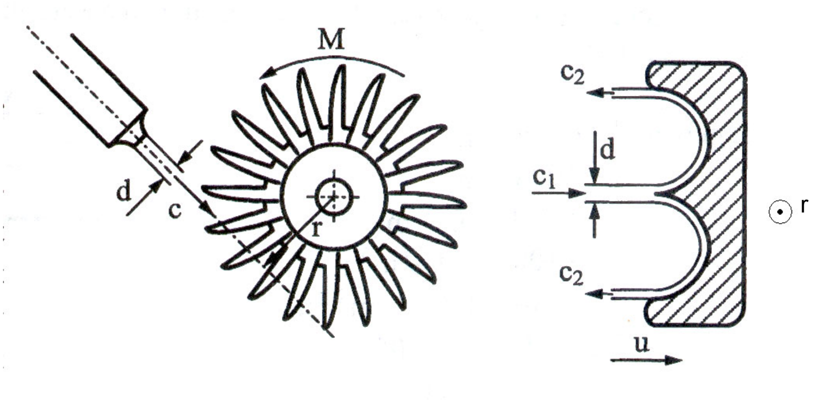
2.2) Zwischen dem Speicherbecken und dem Turbinenhaus tritt in der Hauptrohrleitung ein Druckverlust auf. Das Hauptrohr hat die Länge L, den Durchmesser D und die Sandkornrauhigkeit k_S. Berechnen Sie die Reynolds-Zahl im Hauptrohr. Ist die Strömung laminar oder turbulent (mit Begründung)? Berechnen Sie die Höhe H, damit durch die Rohrleitung der für diesen Aufgabenteil 2 gegebene Massenstrom $\dot{m} = 2500\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ durchgesetzt werden kann. Der Umgebungsdruck sei für diesen Aufgabenteil (2.2) überall konstant.

Gegeben für Teil 2: $\dot{m} = 2500\frac{\text{kg}}{\text{s}}$; $D_{Hauptrohr}$=0,8m; ρ=1000kg/m³; $k_s=1{,}6\cdot10^{-4}$m;

$\nu=1\cdot10^{-6}$m²/s; L=1km; $A_{Düse}$=0,02m²

2.3) Eine Schaufel des Laufrades der Pelton-Turbine besteht aus zwei Halbschalen, die als Strahlteiler wirken (siehe Abb.). Der Umgebungsdruck im Turbinenhaus sei überall konstant.

Berechnen Sie das Haltedrehmoment, um das stillstehende Laufrad festzuhalten (u=0).



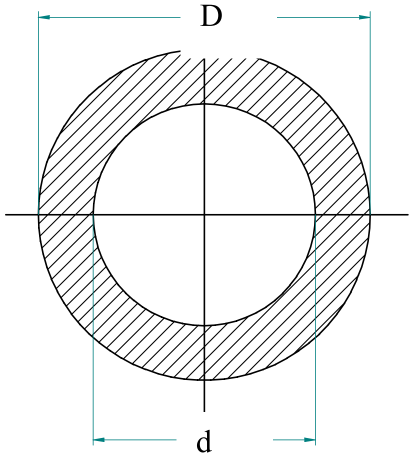
Gegeben für Teil3: d=0,16m; $\dot{m} = 2500\frac{\text{kg}}{\text{s}}$; r=0,6m; ρ=1000kg/m³

2.4 Das Laufrad rotiert mit 600U/min. Über die Turbinenwelle wird Leistung an einen Generator abgegeben. Berechnen Sie die Leistung. Es gelten die gleichen gegebenen Größen wie für Aufgabenteil **2.3)**.

!!Hinweis: Beachten Sie neben dem Absolut- auch das Relativsystem: $\vec{c} = \vec{w} + \vec{u}$ und beachten Sie das Vorzeichen bzw. die Richtung der jeweiligen Geschwindigkeiten**!!**

Aufgabe 3.)

Eine Hohlkugel (s. Abb.) mit dem inneren Durchmesser d und dem äußeren Durchmesser D wird in einen mit flüssigem Honig gefüllten Tank geworfen.



3.1 Berechnen Sie das Verhältnis aus d zu D, für das die Hohlkugel im Honig in der Schwebe gehalten wird. Das Gewicht der eingeschlossenen Luft ist zu vernachlässigen.

Gegeben für Teil 1: ρ_{Kugel}; ρ_{Honig}

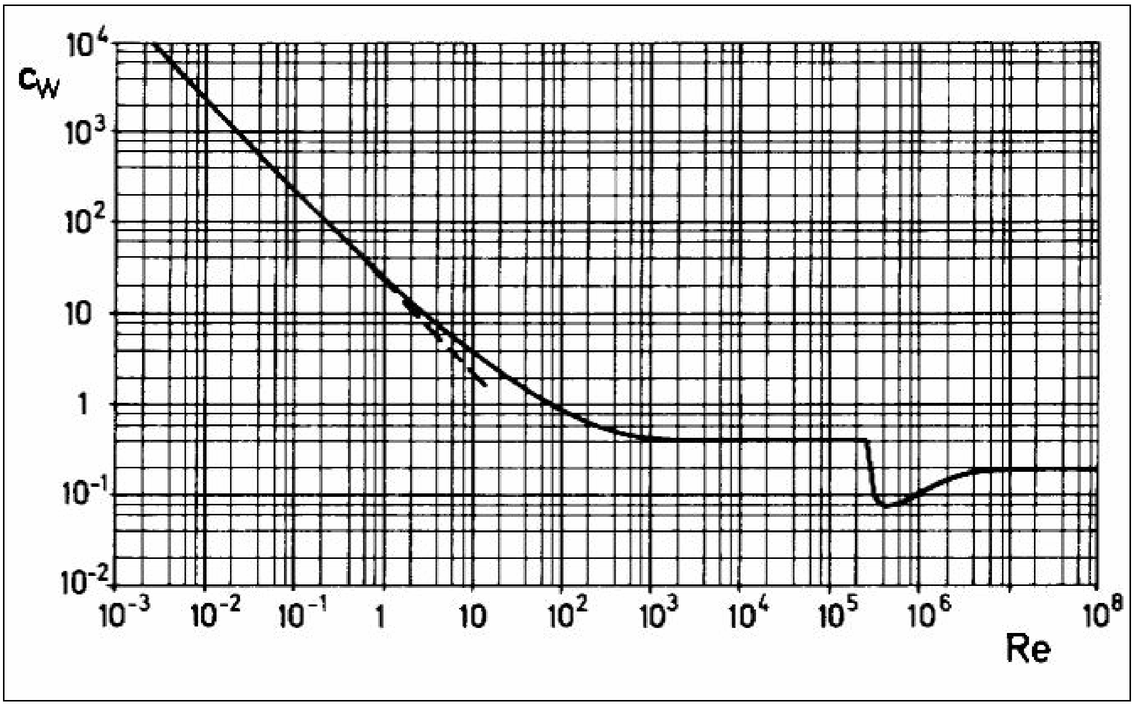
Hinweis: Volumen einer Kugel $V_{Kugel}=\pi \cdot d^3/6$

Für die folgenden Aufgabenteile (**3.2** – **3.4**) wird eine Vollkugel mit dem Außendurchmesser D verwendet.

3.2 Für das Absinken der Kugel stellt sich nach unendlicher Zeit eine stationäre Sinkgeschwindigkeit ein. Zeichen Sie ein vollständiges Freikörperbild und berechnen Sie die stationäre Sinkgeschwindigkeit. Nehmen Sie an, dass die Kugel kriechend umströmt wird und der Widerstandsbeiwert nach dem Stokes'schen Widerstandsgesetz mit $c_w = \frac{24}{Re}$ berechnet werden kann.

Gegeben für Teil 2: ρ_{Kugel}=2500kg/m³; ρ_{Honig}=1400kg/m³; $c_w = \frac{24}{Re}$; D=2mm; η=0,2Pa·s; g=9,81m/s²

3.3) Das folgende Diagramm zeigt den Widerstandbeiwert einer Kugel als Funktion der Reynoldszahl.



Widerstandbeiwert einer Kugel als Funktion der Reynolds-Zahl

- Erklären Sie die physikalische Bedeutung der Reynolds-Zahl. Markieren Sie den Punkt der kritischen Reynoldszahl im Diagramm und beschriften Sie den Bereich der laminaren und der turbulenten Grenzschicht im Diagramm.
- Berechnen Sie mit der aus **3.2)** bestimmten Sinkgeschwindigkeit die entsprechende Reynolds-Zahl. Überprüfen und begründen Sie, ob die Annahme des Stokes'schen Widerstandgesetztes mit $c_w = \frac{24}{Re}$ gerechtfertigt war und tragen Sie den entsprechenden Punkt in das Diagramm ein.

Wenn Sie die Sinkgeschwindigkeit in **3.2)** nicht berechnen konnten, dann nehmen Sie zur Lösung dieses Aufgabenteiles eine Sinkgeschwindigkeit von 0,08m/s an. Dies ist nicht die Lösung aus Aufgabenteil **3.2)**.

3.4) Durch eine Störung wird die Kugel neben der Fallbewegung im Uhrzeigersinn in Rotation versetzt. Skizzieren Sie jeweils die Geschwindigkeiten an der Oberfläche auf der rechten und der linken Seite der Kugel für die reine Fallbewegung und für den Fall der reinen Rotation. Skizzieren Sie dann die Geschwindigkeitsverteilung des Gesamtsystems. Beschreiben Sie qualitativ die Veränderungen des Fallweges gegenüber Aufgabenteil **3.2)** ohne Rotation. Begründen Sie Ihre Antwort.

Musterlösungen der Klausur Strömungsmechanik I SoSem 05

Kurzaufgaben

Kurzaufgabe 1a.)

$$M = \tau \cdot A_{Zylinder} \cdot R$$

$$\tau = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \eta \cdot \frac{\omega \cdot (R + s)}{s}$$, Newton'sches Fluid

$$\tau = 50 \cdot 10^{-3}\,Pa \cdot s \cdot \frac{5\frac{1}{s} \cdot (0{,}052m)}{0{,}002m} = 6{,}5\frac{N}{m^2}$$

$$A_{Zylinder} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot L$$

$$A_{Zylinder} = 2 \cdot \pi \cdot (0{,}05m) \cdot 0{,}2m = 0{,}063m^2,$$

$$M = 6{,}5\frac{N}{m^2} \cdot 0{,}063m^2 \cdot 0{,}05m = 0{,}02Nm,$$

Kurzaufgabe 1b.)

$$\dot{V}_1 = 30\frac{m^3}{min} = 0{,}5\frac{m^3}{s}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R_i \cdot T_1} = \frac{10^5\,Pa}{287\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 273{,}15K} = 1{,}28\frac{kg}{m^3}$$

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot \dot{V}_1 = 1{,}28\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}5\frac{m^3}{s} = 0{,}64\frac{kg}{s}$$, Massenstrom bleibt konstant

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R_i \cdot T_2} = \frac{4 \cdot 10^5\,Pa}{287\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 348{,}15K} = 4\frac{kg}{m^3}$$

Schallgeschwindigkeit nach Verdichtung (Zustand 2):

$$Ma = \frac{c_2}{\sqrt{\kappa \cdot R_i \cdot T_2}} = 0{,}8$$

$$c_2 = 0{,}8 \cdot \sqrt{\kappa \cdot R_i \cdot T_2} = 0{,}8 \cdot \sqrt{1{,}4 \cdot 287\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 348{,}15K} = 299{,}24\frac{m}{s}$$

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 \cdot c_2} = \frac{0,64\,\frac{kg}{s}}{4\,\frac{kg}{m^3} \cdot 299,24\,\frac{m}{s}} = 0,53 \cdot 10^{-3}\,m^2$$

Kurzaufgabe 1c.)

Bernoulli von 1 nach 2: $p_1 + \rho \cdot \frac{c_1^2}{2} = p_2 + \rho \cdot \frac{c_2^2}{2}$ mit $\rho_1 = \rho_2$

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot \left(\frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \right) \quad |: \rho \cdot \frac{c_1^2}{2}$$

$$c_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_1^2} = 1 - \frac{c_2^2}{c_1^2},$$

Konti: $\dot{m} = \rho \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho \cdot c_2 \cdot A_2$

$\frac{c_2}{c_1} = \frac{A_1}{A_2}$, mit $AR = \frac{A_2}{A_1}$

$$c_p = 1 - \frac{1}{AR^2}$$

Aufgabe 2.)

2.1) Massenstrom durch Düse, reibungsfrei,

$$p_h(H)+\rho\cdot g\cdot H = p_0+\rho\cdot\frac{c_0^2}{2}$$, Bernoulli Oberfläche Wasser -> Austritt der Düse

$$c_0^2=\frac{2}{\rho}\left(p_0\cdot e^{\left(-\frac{\rho_{0,Luft}\cdot g}{p_{0,Luft}}\cdot H\right)}-p_0+\rho\cdot g\cdot H\right)$$

$$c_0^2=\frac{2}{1000\frac{kg}{m^3}}\cdot\left(10^5\,Pa\cdot e^{\left(-\frac{1{,}2\frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{10^5\,Pa}\cdot 900m\right)}-10^5\,Pa+1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 900m\right)=17636{,}92\frac{m^2}{s^2}$$

$$c_0=132{,}8\frac{m}{s}$$

$$\dot m=\rho\cdot c_0\cdot A_{Düse}=1000\frac{kg}{m^3}\cdot 132{,}8\frac{m}{s}\cdot 0{,}02m^2=2656\frac{kg}{s}$$

2.2) Druckverlust,

$$\dot m=c_m\cdot\frac{\pi}{4}\cdot D^2\cdot\rho$$

$$c_m=\frac{2500\frac{kg}{s}}{1000\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(0.8m)^2}=4{,}97\frac{m}{s}$$

$$Re=\frac{c_m\cdot D}{\nu}=\frac{4{,}97\frac{m}{s}\cdot 0{,}8m}{1\cdot 10^{-6}\frac{m^2}{s}}=3{,}98\cdot 10^6$$

Strömung ist vollturbulent, da Re>>2300.

Moody-Diagramm mit $k_s/D=2\cdot 10^{-4}$ und $Re=3{,}98\cdot 10^6$ liefert $\lambda=0{,}014$

Berechnung des Druckverlustes:

$$\Delta p_{Verlust}=\lambda\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{\rho}{2}\cdot c_m^2=0{,}014\cdot\frac{1000m}{0{,}8m}\cdot\frac{1000\frac{kg}{m^3}}{2}\cdot\left(4{,}97\frac{m}{s}\right)^2=216445.4Pa\,\hat{=}\,2{,}16bar$$

Berechung der Höhe:

$p_0 + \rho \cdot g \cdot H = p_0 + \rho \cdot \frac{c_{Düse}^2}{2} + \Delta p_{Verlust}$, reibungsbehaftet Bernoulli von Wasserstand Speicherbecken bis Austritt Düse

Geschwindigkeit in der Düse:

$$c_{Düse} = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A_{Düse}} = \frac{2500\frac{kg}{s}}{1000\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}02m^2} = 125\frac{m}{s}$$

$$H = \frac{\rho \cdot \frac{c_{Düse}^2}{2} + \Delta p_{Verlust}}{\rho \cdot g} = \frac{1000\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{\left(125\frac{m}{s}\right)^2}{2} + 216445{,}4Pa}{1000\frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = 818{,}45m$$

2.3) Haltemoment,

Strahlteiler teilt den Massenstrom auf, $c_1 = c \text{ und } c_2 = -c$ aus Bernoulli von 1 nach 2, Euler'sche Turbinehauptgleichung

$M = \dot{m} \cdot \left(r_1 \cdot c_{u,1} - r_2 \cdot c_{u,2}\right)$ Es tritt keine Radial- oder Axialkomponente auf, daher nur 1D.

$$M = \dot{m} \cdot \left(r \cdot c - r(-c)\right) = \dot{m} \cdot 2 \cdot r \cdot c$$

$$c = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{2500\frac{kg}{s}}{1000\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}16m)^2} = 124{,}34\frac{m}{s}$$

$$M = 2500\frac{kg}{s} \cdot 2 \cdot 0{,}6m \cdot 124{,}34\frac{m}{s} = 373020Nm$$

Alternativ über den Impulssatz mit Freischneiden der Schaufel und berechnen einer Haltekraft.

2.4) Berechung der Leistung,

Zum Berechnen der Leistung müssen weiterhin die Absolutgeschwindigkeiten benutzt werden. Allerdings muss das Vorzeichen der Geschwindigkeiten beachtet werden.

$P = M \cdot \omega$, mit $\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot \frac{600}{60s} = 62{,}83\frac{rad}{s}$

$M = \dot{m} \cdot \left(r_1 \cdot c_{u,1} - r_2 \cdot c_{u,2}\right)$ Euler'sche Turbinenhauptgleichung

$c_{u,1} = c = 124,34\frac{m}{s}$ (siehe **3.**))

$\vec{c}_1 = \vec{w}_1 + \vec{u}$

$\vec{c}_2 = \vec{w}_2 + \vec{u}$

$\vec{w}_1 = -\vec{w}_2$ aus Kontigleichung von Punkt von 1 zu 2 unter Beachtung der Richtungen der Geschwindigkeiten

$\Rightarrow -\left(\vec{c}_2 + \vec{u}\right) = \vec{c}_1 - \vec{u}$

$\vec{c}_2 = -\vec{c}_1 + 2\cdot\vec{u}$

$c_2 = -124,34\frac{m}{s} + 2\cdot 62,83\frac{rad}{s}\cdot 0,6m = -48,94\frac{m}{s}$, da eindimensionale Vektoren vorliegen, können die Beträge direkt benutzt werden

$P = 2500\frac{kg}{s}\cdot 0,6m\cdot\left[124,34\frac{m}{s} - \left(-48,94\frac{m}{s}\right)\right]\cdot 62,83\frac{rad}{s}$

$P = 16,33\cdot 10^6\,W \triangleq 16,33MW$

Aufgabe 3.)

3.1) Schwebezustand der Hohlkugel,

$$F_{Auftrieb} = F_{Gewicht}$$

$$\rho_{Kugel} \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \left(D^3 - d^3\right) \cdot g = \rho_{Honig} \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot D^3 \cdot g$$

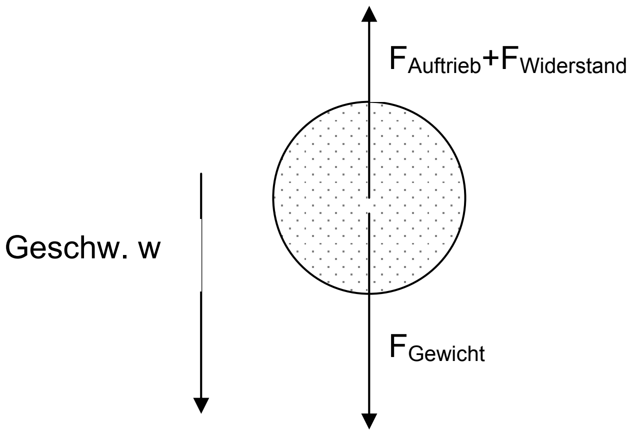
$$\rho_{Kugel} \cdot \left(D^3 - d^3\right) = \rho_{Honig} \cdot D^3$$

$$\frac{\left(D^3 - d^3\right)}{D^3} = \frac{\rho_{Honig}}{\rho_{Kugel}}$$

$$1 - \frac{d^3}{D^3} = \frac{\rho_{Honig}}{\rho_{Kugel}}$$

$$\frac{d}{D} = \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{Honig}}{\rho_{Kugel}}}$$

3.2) Stationäre Sinkgeschwindigkeit,



$F_{Auftrieb} + F_{Widerstand} = F_{Gewicht}$, Widerstandkraft gegen die Relativbewegung

$$F_{Auftrieb} = \rho_{Honig} \cdot g \cdot \frac{\pi}{6} \cdot D^3$$

$$F_{Widerstand} = c_w \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot w^2 \cdot \rho_{Honig}$$

$$F_{Gewicht} = \rho_{Kugel} \cdot g \cdot \frac{\pi}{6} \cdot D^3$$

$$g \cdot D^3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \left(\rho_{Kugel} - \rho_{Honig}\right) + c_w \cdot D^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \rho_{Honig} \cdot w^2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$w^2 = \frac{g \cdot D}{c_w \cdot \rho_{Honig}} \cdot \frac{4}{3}\left(\rho_{Kugel} - \rho_{Honig}\right)$$

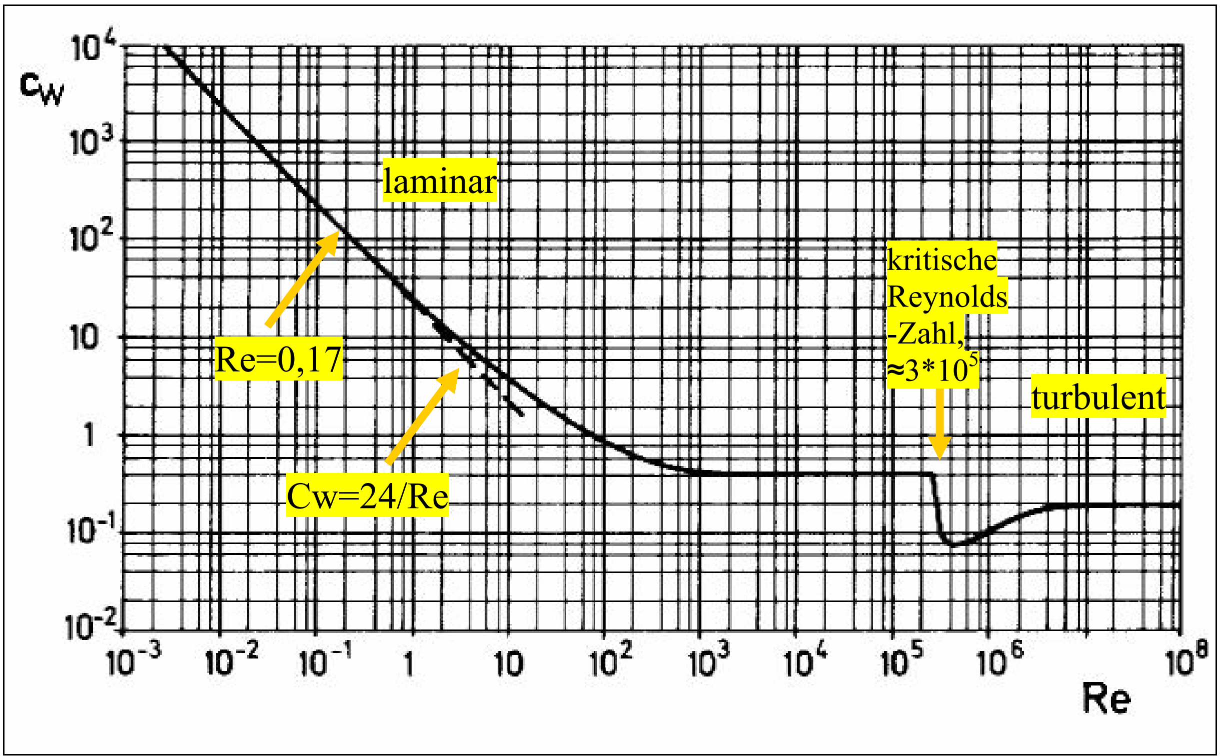
laminar: $c_w = \frac{24}{Re}$, $Re = \frac{\rho_{Honig} \cdot D \cdot w}{\eta}$

$$w^2 = \frac{g \cdot D}{24 \cdot \rho_{Honig}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\rho_{Kugel} - \rho_{Honig}\right) \cdot \frac{\rho_{Honig} \cdot w \cdot D}{\eta}$$

$$w = \frac{g \cdot D^2}{18 \cdot \eta} \cdot \left(\rho_{Kugel} - \rho_{Honig}\right) = 0{,}012 \frac{m}{s}$$

3.3) Reynolds-Zahl und Widerstand,

Die Reynolds-Zahl ist das Verhältnis aus Trägheits- zu Reibungskräften.



DIAGRAMM

Berechnung der Reynolds-Zahl aus 3.2.)

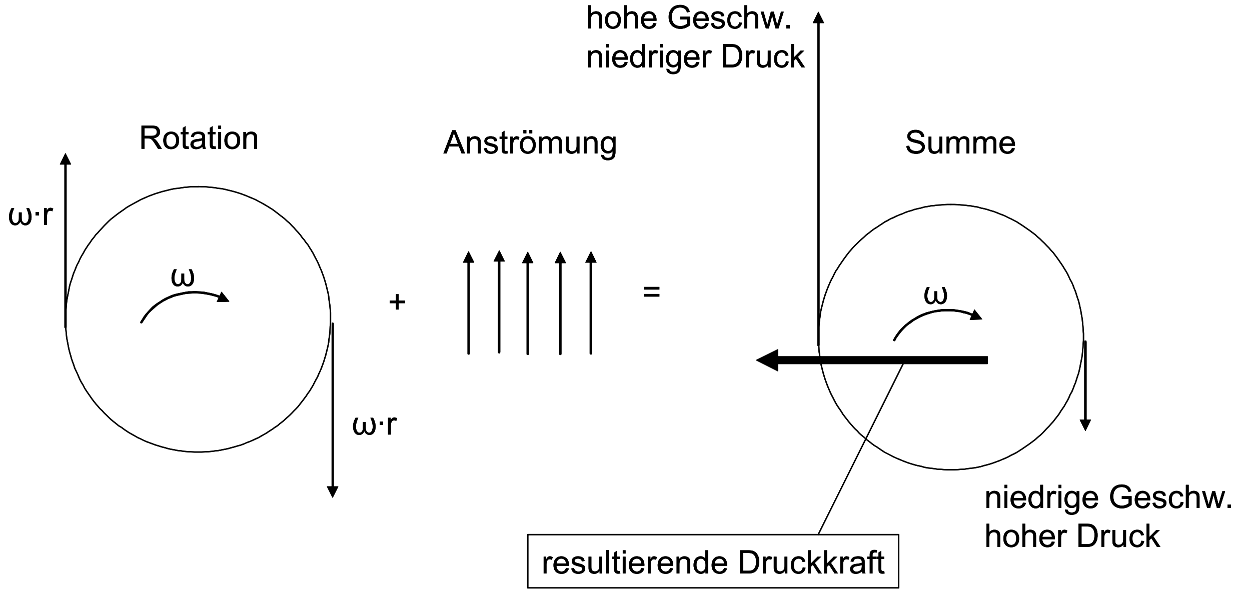
$$Re = \frac{\rho_{Honig} \cdot D \cdot w}{\eta} = \frac{1400 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}002 m \cdot 0{,}012 \frac{m}{s}}{0{,}2 Pa \cdot s} = 0{,}168$$

Für eine Reynolds-Zahl von 0,168 liegt der Wert des Widerstandbeiwertes auf der analytischen Lösung von $c_w = \frac{24}{Re}$ (Stokes'sches Widerstandgesetz). Steigung der Geraden ist -1.

Alternative Lösung:

Mit $w = 0{,}08\frac{m}{s}$ ergibt sich eine Reynolds-Zahl von 1,12. Diese liegt ebenfalls auf der Stokes'schen Geraden 24/Re

3.4) Bewegung aufgrund der Rotation,



Durch die Rotation ergibt sich eine unsymmetrische Druck und Geschwindigkeitsverteilung an der Kugeloberfläche. Auf der linken Seite, wo sich Rotationsgeschwindigkeit und Kugelgeschwindigkeit addieren, sinkt der statische Druck. Auf der rechten Seite werden die Geschwindigkeiten voneinander abgezogen, so dass der statische Druck steigt. Die resultierende Druckkraft erzeugt eine horizontale Geschwindigkeitskomponente nach links. Diese Kraft wird Magnus-Kraft genannt.