Leibniz Universität Hannover
Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik
Prof. Dr.-Ing. J. Seume

Klausur Herbst 2007

„Strömungsmechanik I“

Bearbeitungsdauer **90 min**

zugelassene Hilfsmittel:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- TFD-Formelsammlung (ohne handschriftliche Ergänzungen)
- Lineal und Schreibmaterial
- mitgebrachtes Papier

weitere Hinweise: Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.
Beschriften Sie jedes Blatt mit Name und Matrikelnr.

Name	Vorname	Matr. Nummer

	mögliche Punktezahl	erreichte Punktezahl
Aufgabe 1	17	
Aufgabe 2	19	
Aufgabe 3	24	
Gesamt	60	
	Note	

!!Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar!!

Viel Erfolg!

Kurzaufgabe 1a.) 4Punkte

Eine dünne Platte wird mit c=300km/h in Luft unter Atmosphärendruck parallel überströmt.

I. Berechnen Sie die Dicke der laminaren Grenzschicht nach 0,06m?
II. Bei welchem Abstand x_T von der Vorderkante findet der Umschlag in die turbulente Grenzschicht statt?

Geg.: c=300km/h; $\rho_{Luft} = 1{,}2 kg/m^3$; $\eta_{Luft} = 17 \mu Pa \cdot s$; $Re_{krit}=5 \cdot 10^5$

Kurzaufgabe 1b.) 7Punkte

Für einen Test in einem Windkanal soll der Anstellwinkel λ eines symmetrischen Schaufelprofils nach Abbildung 1 ausgelegt werden. Die Zu- sowie Abströmung der Schaufel soll im Auslegungspunkt über der gesamten Kanalhöhe rein axial ohne Umfangskomponente erfolgen.

Zeichnen und beschriften Sie jeweils vollständig das Geschwindigkeitsdreieck an der Nabe sowie am Gehäuse und berechnen Sie anschließend den Anstellwinkel der Schaufel an der Nabe sowie am Gehäuse. Wie groß ist die Leistungsauf- bzw. Abgabe des Schaufelradantriebes? (mit Begründung)

Hinweis: Es kann von einer konstanten Axialgeschwindigkeit über der Kanalhöhe ausgegangen werden.

Geg.: $R_{Nabe}=0{,}14m$; $R_{Gehäuse}=0{,}24m$; n=2500U/min; $\dot{m}=5{,}5kg/s$; $\rho=1{,}2kg/m^3$

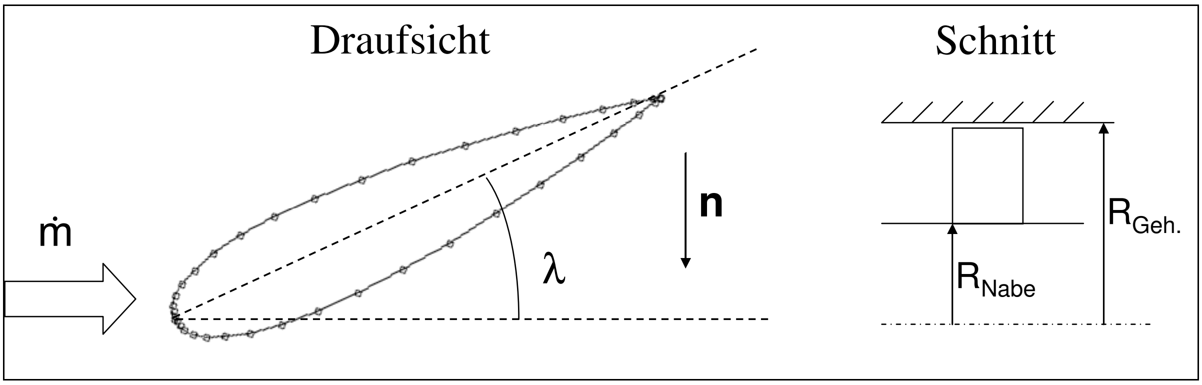


Abbildung 1

Kurzaufgabe 1c.) 6Punkte

Ein abgeschlossener zylindrischer Behälter nach Abbildung 2 ist zum Teil mit Luft (ideales Gas) und zum Teil mit Wasser (Anfangsfüllhöhe H_0) gefüllt. Der Druck in der Gasphase beträgt zu Beginn p_0. Unten befindet sich ein Ventil, welches geöffnet wird, so dass der Wasserspiegel absinkt. Die Temperatur in der Gasphase sei zu jedem Zeitpunkt gleich der Umgebungstemperatur T_0. Berechnen Sie das Absinken des Füllstandes h. Das Wasser sei inkompressibel.

Hinweis: Die Aufgabe gilt als gelöst, wenn eine Gleichung aufgestellt wurde, in der neben der Unbekannten h nur gegebene Größen vorkommen. Ein Auflösen nach h=… ist nicht notwendig, um die Aufgabe vollständig zu lösen.

Geg.: ρ_{Wasser}, p_0, L_1, L_2, H_0, g

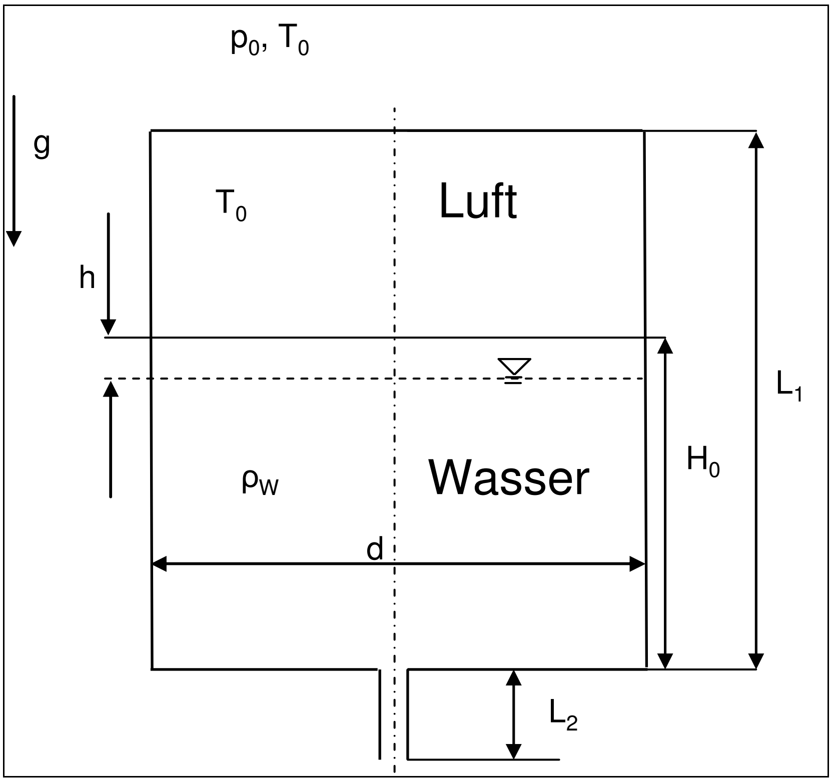


Abbildung 2

Aufgabe 2.) 19Punkte

Aus einem oben offenen und unendlich großem Wasserbehälter (Abbildung 3) führt eine gerade, waagerecht liegende Rohrleitung ins Freie. Rohrabschnitt 1 hat die Wandrauhigkeit k_1 und Rohrabschnitt 2 die Wandrauhigkeit k_2. Die Strömung sei inkompressibel.

Hinweis: Einlaufeffekte sind zu vernachlässigen.

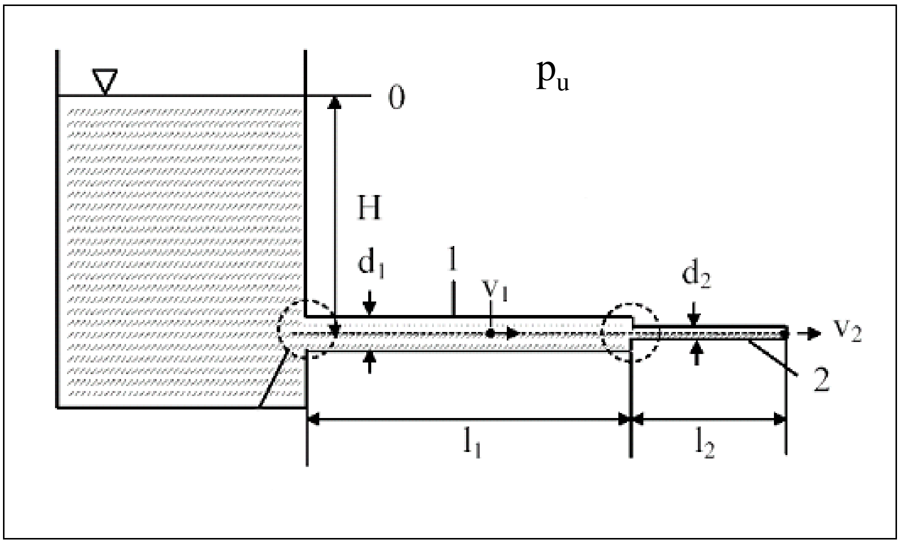


Abbildung 3

2.1) Massenstrom (3Punkte)

Die Strömung sei reibungsfrei. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Wassers v_2. Wie hoch ist der Massenstrom?

Geg.: d_2=0,08m; H=10m; ρ=1000kg/m³; g=9,81m/s²

2.2) Turbinenleistung (4Punkte)

Die Strömung sei reibungsfrei. Rohrabschnitt 2 wird abgetrennt und am Ende von Abschnitt 1 wird eine kleine Turbine eingebaut. Wie groß ist dann die mechanische Leistung der Turbine? Nehmen Sie an, dass die Austrittgeschwindigkeit gegenüber Umgebung aus der Turbine 20% der Eintrittsgeschwindigkeit in die Turbine beträgt.

Geg.: $\dot{m}$=40kg/s; d_1=0,1m; H=10m; ρ=1000kg/m³; g=9,81m/s²

2.3) Höhe (12Punkte)

Die Turbine wird entfernt und die Ausgangskonfiguration mit den beiden Rohrabschnitten ist wieder vorhanden. Die Strömung ist für diese Teilaufgabe reibungsbehaftet. Der Massenstrom beträgt $\dot{m}$=50kg/s. Berechnen Sie jeweils den Druckverlust der beiden Rohrabschnitte 1 und 2. Berechnen Sie anschließend die neue Höhe H.

Geg.: l_1=12m; l_2=2m; d_1=0,1m; d_2=0,08m; $k_1=10^{-3}$m; $k_2=0{,}48\cdot 10^{-3}$m; ρ=1000kg/m³;
$\nu=10^{-6}$m²/s; g=9,81m/s², $\dot{m}$=50kg/s

Aufgabe 3.) 24Punkte

Ein ideales und isentropes Gas befindet sich in einem unendlich großen Kessel unter einem Druck von p_0 und einer Temperatur von T_0. Es strömt durch eine konvergente Düse mit dem minimalen Querschnitt A_{min} in die umgebende Atmosphäre mit p_1.

3.1) Kritische Strömung (4Punkte)

Ist die Strömung unter- oder überkritisch? Begründen Sie Ihre Antwort.
Wie groß ist der Massenstrom $\dot{m}$?
Welche Strömungsgeschwindigkeit stellt sich am minimalen Querschnitt der Düse (A_{min}) ein? Begründen Sie Ihre Antwort.
Geg.: κ=1,4; T_0=293K ; p_0=5bar; p_1=1bar; A_{min}=10cm^2; R=287J/(kg·K)

3.2) Massenstrom (1Punkte)

An den minimalen Querschnitt der konvergenten Düse schließt eine trichterförmige Erweiterung bis auf einen Querschnitt A_1 an? Welche Größe müsste bei konstanten Drücken (p_0 und p_1), konstanter Geometrie und konstanten Stoffdaten verändert werden, damit der Massenstrom erhöht werden kann? Begründen Sie Ihre Antwort (inkl. Formel).

3.3) Trichterförmige Erweiterung (7Punkte)

Welche Strömungsgeschwindigkeit, Temperatur und Mach-Zahl stellt sich am Austritt der trichterförmigen Erweiterung (A_1) ein, wenn das Gas in nahezu Vakuum (p_1=0,1bar) expandiert?
Geg.: κ=1,4; T_0=293K ; p_0=5bar; p_1=0,1bar; R=287J/(kg·K); A_1=90cm^2

3.4) Turbinenleistung (12Punkte)

Die trichterförmige Erweiterung wird durch eine Turbinenstufe (Leitschaufel + Laufschaufel) nach Abbildung 4 ersetzt. Die Abströmung aus den Leitschaufeln erfolgt unter einem Winkel von α_2 gegenüber der Maschinenachse. Die Schaufelhöhe ist über der gesamten Stufe konstant und die entsprechende Ringfläche des Strömungsquerschnittes zwischen den Leit- und Laufschaufeln wird mit A_2 bezeichnet. Mittels einer Temperaturmessstelle wird an der Stelle 2 eine statische Temperatur T_2 gemessen. Die Laufschaufeln drehen mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Abströmung aus der Laufschaufel erfolgt rein axial. Berechnen Sie den Massenstrom und die Leistung der Turbinenstufe, die über eine Welle an einen Generator abgeben werden kann.

<u>Hinweis:</u> Zur Berechnung der Leistung soll ein mittlerer Radius r_m betrachtet werden. Innerhalb der Beschaufelung kann mit einer konstanten Dichte ρ gerechnet werden.

Geg.: ω, α_2, ρ, r_m, c_p, T_0, T_2, A_2

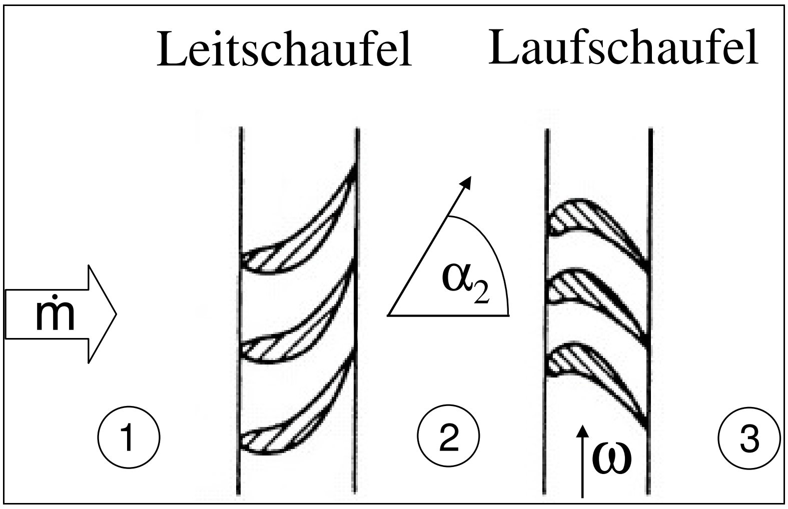


Abbildung 4

Musterlösungen der Klausur
Strömungsmechanik I - Herbst 07

Kurzaufgaben

Kurzaufgabe 1a.)

$$c = 300\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \triangleright 83{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \text{ mit } \mathrm{Re}_x = \frac{x \cdot c}{\nu} \text{ und x=0,06m}$$

$$\delta = \frac{0{,}06\mathrm{m}\cdot 5}{\sqrt{\dfrac{83{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 0{,}06\mathrm{m}}{\dfrac{17\cdot 10^{-6}\,\mathrm{Pa\cdot s}}{1{,}2\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}}}$$

$$\delta = 5{,}05\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{Re}_{krit} = \frac{x_T \cdot c}{\nu}$$

$$x_T = \frac{\mathrm{Re}_{krit}\cdot\eta}{c\cdot\rho}$$

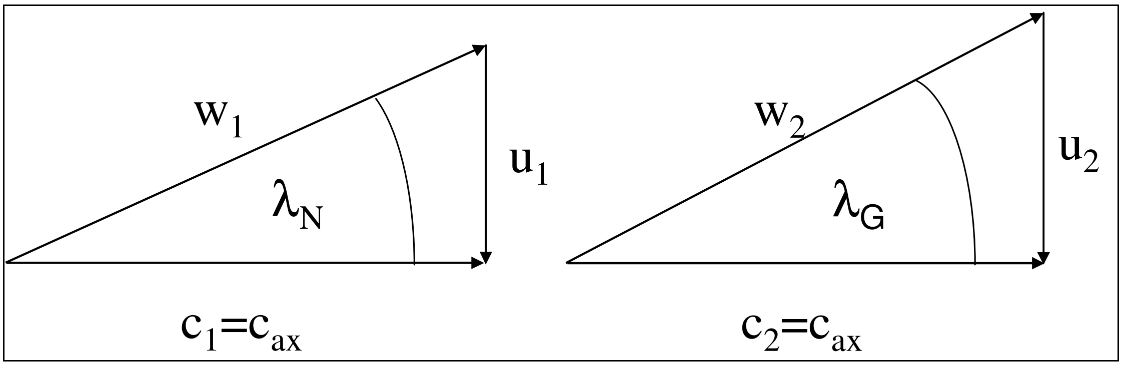
$$x_T = \frac{5\cdot 10^5 \cdot 17\cdot 10^{-6}\,\mathrm{Pa\cdot s}}{83{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1{,}2\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}$$

$$x_T = 0{,}085\mathrm{m}$$

Kurzaufgabe 1b.)

$$\dot{m} = \rho\cdot A\cdot c_{ax}$$

$$c_{ax} = \frac{5{,}5\mathrm{kg/s}}{1{,}2\mathrm{kg/m^3}\cdot\pi\cdot\left((0{,}24\mathrm{m})^2-(0{,}14\mathrm{m})^2\right)} = 38{,}39\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$



u_2 muss größer sein als u_1 aufgrund des größeren Radius.

$$\tan(\lambda_i) = \frac{u_i}{c_i = c_{ax}}$$

$$\tan(\lambda_i) = \frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot R_i}{c_i = c_{ax}}$$

$$\lambda_i = \arctan\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot R_i}{c_i = c_{ax}}\right)$$

$$\lambda_{Nabe} = \arctan\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{2500}{60s} \cdot 0{,}14m}{38{,}39\frac{m}{s}}\right) = 43{,}67°$$

$$\lambda_{Gehäuse} = \arctan\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{2500}{60s} \cdot 0{,}24m}{38{,}39\frac{m}{s}}\right) = 58{,}57°$$

Leistungsaufnahme ist null, da die Differenz der Umfangskomponenten der Absolutgeschwindigkeiten Δc_u=0 (drallfreie Zu- und Abströmung) ist. Nach der Euler'schen Turbinenhauptgleichung wird damit keine Leistung übertragen.

Kurzaufgabe 1c.)

$p_0 = \rho_W \cdot g \cdot (L_2 + H_0 - h) + p_1$ Hydrostatik

$$h = \frac{(p_1 - p_0)}{\rho_W \cdot g} + H_0 + L_2$$

$p_0 \cdot V_0 = m \cdot R_{universal} \cdot T_0 = p_1 \cdot V_1$ mit $(m \cdot R_{universal} \cdot T_0)$=const.

$$V_0 = A \cdot (L_1 - H_0)$$

$$V_1 = A \cdot (L_1 - H_0 + h)$$

$$p_1 = p_0 \cdot \frac{(L_1 - H_o)}{(L_1 - H_0 + h)}$$

$$h = \frac{\left(p_0 \cdot \frac{(L - H_o)}{(L - H_0 + h)} - p_0\right)}{\rho_W \cdot g} + H_0 + L_2$$

Aufgabe 2.)

2.1)

$$\frac{c_0^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+g\cdot H=\frac{c_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}$$ mit $c_0=0$ und $p_2=p_0$

$$c_2=\sqrt{2\cdot g\cdot H}$$

$$c_2=\sqrt{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 10m}=14\frac{m}{s}$$

$$\dot{m}=\rho\cdot A_2\cdot c_2$$

$$\dot{m}=1000\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{\pi}{4}(0{,}08m)^2\cdot 14\frac{m}{s}=70{,}4\frac{kg}{s}$$

2.2)

$$\frac{c_0^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+g\cdot H+\frac{P}{\rho\cdot\dot{V}}=\frac{c_{aus}^2}{2}+\frac{p_{aus}}{\rho}$$ mit $c_0=0$ und $p_2=p_0$

$$g\cdot H+\frac{P}{\rho\cdot\dot{V}}=\frac{c_{aus}^2}{2}$$

$$P=\dot{m}\cdot\left(\frac{c_{aus}^2}{2}-g\cdot H\right)$$

$$\dot{m}=\rho\cdot A_1\cdot c_1$$

$$c_1=\frac{\dot{m}}{\rho\cdot A_1}=\frac{40\frac{kg}{s}}{1000\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(0{,}1m)^2}=5{,}09\frac{m}{s}$$

$$c_{aus}=c_1\cdot 0{,}2=5{,}09\frac{m}{s}\cdot 0{,}2=1{,}02\frac{m}{s}$$

$$P=40\frac{kg}{s}\cdot\left(\left(1{,}02\frac{m}{s}\right)^2-9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 10m\right)$$

$$P_{13}=-3882{,}38W$$

2.3)

$$\dot{m}=\rho\cdot A_1\cdot c_1=\rho\cdot A_2\cdot c_2$$

$$c_1 = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A_1} = \frac{50\,\frac{kg}{s}}{1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}1m)^2} = 6{,}37\,\frac{m}{s}$$

$$c_2 = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A_2} = \frac{50\,\frac{kg}{s}}{1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}08m)^2} = 9{,}95\,\frac{m}{s}$$

$$Re_1 = \frac{c_1 \cdot d_1}{\nu} = \frac{6{,}37\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}1m}{10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} = 6{,}4 \cdot 10^5$$

$$Re_2 = \frac{c_2 \cdot d_2}{\nu} = \frac{9{,}95\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}08m}{10^{-6}\,\frac{m^2}{s}} = 8 \cdot 10^5$$

$$\frac{k_{s,1}}{d_1} = \frac{10^{-3}\,m}{0{,}1m} = 10^{-2}$$

$$\frac{k_{s,2}}{d_2} = \frac{0{,}48 \cdot 10^{-3}\,m}{0{,}08m} = 6 \cdot 10^{-3}$$

Moody-Diagramm:

$\lambda_1 = 0{,}038$

$\lambda_2 = 0{,}032$

$$\Delta p_{v,1} = \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{\rho \cdot c_1^2}{2} = 0{,}038 \cdot \frac{12m}{0{,}1m} \cdot \frac{1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot \left(6{,}37\,\frac{m}{s}\right)^2}{2} = 92151Pa$$

$$\Delta p_{v,2} = \lambda_1 \cdot \frac{L_2}{d_2} \cdot \frac{\rho \cdot c_2^2}{2} = 0{,}032 \cdot \frac{2m}{0{,}08m} \cdot \frac{1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot \left(9{,}95\,\frac{m}{s}\right)^2}{2} = 39601Pa$$

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g \cdot H = \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\Delta p_{v,ges}}{\rho}$$

$$H = \frac{c_2^2}{2 \cdot g} + \frac{\Delta p_{v,ges}}{\rho \cdot g} = \frac{\left(9{,}95\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} + \frac{132116Pa}{1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 18{,}51m$$

Aufgabe 3.)

3.1)

$$\Pi = \frac{p_1}{p_0} = \frac{1\mathrm{bar}}{5\mathrm{bar}} = 0{,}2 \text{ reales Druckverhältnis}$$

$$\Pi^* = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{2{,}4}\right)^{\frac{1{,}4}{0{,}4}} = 0{,}53 \text{ kritisches Druckverhältnis}$$

Damit ist das reale kleiner als das kritische Druckverhältnis. Daraus folgt, dass die Strömung überkritisch ist.

$$c^* = a = \sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot R\cdot T_0} = \sqrt{\frac{2{,}8}{2{,}4}\cdot 287\frac{\mathrm{J}}{(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K})}\cdot 293\mathrm{K}} = 313{,}22\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Aufgrund der Tatsache, dass eine konvergente Düse vorliegt, kann maximal Schallgeschwindigkeit erreicht werden.

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

$$\rho^* = \frac{\rho_0}{\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} = \frac{\frac{p_0}{R\cdot T_0}}{\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} = \frac{\frac{5\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}{287\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\cdot 293\mathrm{K}}}{\left(\frac{1{,}4+1}{2}\right)^{\frac{1}{1{,}4-1}}} = 3{,}77\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\dot m = \rho^*\cdot A_{min}\cdot c^* = 3{,}77\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2\cdot 313{,}22\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}18\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

3.2)

$$\dot m = A\cdot\sqrt{2\cdot p_0\cdot\rho_0}\cdot\sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1}\left(\Pi^{\frac{2}{\kappa}} - \Pi^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)}$$

Für eine gegebene Geometrie und gegebene Drücke kann der Massenstrom nur durch eine Erhöhung der Ruhedichte bzw. über das ideale Gasgesetz eine Erhöhung der Ruhetemperatur gesteigert werden.

3.3)

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\cdot\kappa}\cdot\frac{\rho_0}{p_0}\cdot c_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{mit } c_0=0$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}4}{0{,}4} \cdot 287 \frac{J}{(kg \cdot K)} \cdot 293K \cdot \left[1 - \left(\frac{0{,}1}{5}\right)^{\frac{0{,}4}{1{,}4}}\right]} = 629{,}4 \frac{m}{s}$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2 \cdot \kappa} \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot c_1^2\right) \text{ mit } c_0 = 0$$

$$T_1 = T_0 \cdot \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2 \cdot \kappa} \cdot \frac{1}{R \cdot T_0} \cdot c_1^2\right) = 293K \cdot \left(1 - \frac{1{,}4 - 1}{2 \cdot 1{,}4} \cdot \frac{1}{287 \frac{J}{(kg \cdot K)} \cdot 293K} \cdot \left(629{,}4 \frac{m}{s}\right)^2\right)$$

$$T_1 = 95{,}82K$$

$$Ma_1 = \frac{c_1}{\sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1}} = \frac{629{,}4 \frac{m}{s}}{\sqrt{1{,}4 \cdot 287 \frac{J}{(kg \cdot K)} \cdot 95{,}82K}} = 3{,}21$$

3.4)

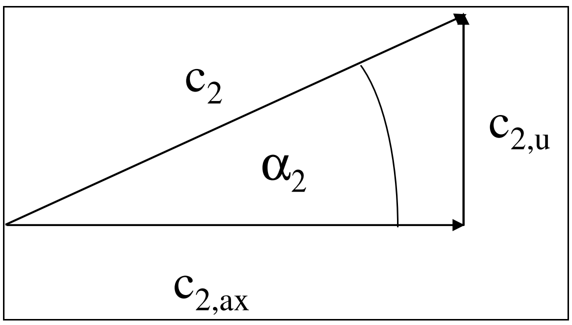
Energieerhaltung mit Zustand 2 nach Leitrad und Zustand 0 im Kessel

$$\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + g \cdot z_2\right) - \left(u_0 + \frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} + g \cdot z_0\right) = q_{0,2} \text{ mit } z_0 = z_2 = 0,\ c_0 = 0 \text{ und } q_{0,2} = 0$$

$$\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}\right) = \left(u_0 + \frac{p_0}{\rho_0}\right) \text{ mit } h = u + \frac{p}{\rho}$$

$$\left(h_2 + \frac{c_2^2}{2}\right) = h_0 \text{ mit } h = c_p \cdot T$$

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot c_p \cdot (T_0 - T_2)}$$



$$\dot{m} = \rho \cdot A_2 \cdot c_{2,ax}$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{c_{2,ax}}{c_2}$$

$$\dot{m} = \rho \cdot A_2 \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \sqrt{2 \cdot c_p \cdot (T_0 - T_2)}$$

Euler'sche Turbinenhauptgleichung

$P = \dot{m} \cdot \omega \cdot (r_3 \cdot c_{3,u} - r_2 \cdot c_{2,u})$ mit $r_2 = r_3 = r_m$, $c_{3,u} = 0$, da die Abströmung aus der Laufschaufel rein axial erfolgt.

$$\sin(\alpha_2) = \frac{c_{2,u}}{c_2}$$

$$P = -\underbrace{\left(\rho \cdot A_2 \cdot \cos(\alpha 2) \cdot \sqrt{2 \cdot c_p \cdot (T_0 - T_2)}\right)}_{\dot{m}} \cdot \omega \cdot \underbrace{(r_m \cdot \sin(\alpha_2) \cdot c_2)}_{c_{2,u}}$$