

Klausur Herbst 2008

„Strömungsmechanik I“

Bearbeitungsdauer: 90 min

zugelassene Hilfsmittel:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- TFD-Formelsammlung (ohne handschriftliche Ergänzungen)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht, => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- mitgebrachtes Papier
- nicht elektronische Wörterbücher (ohne handschriftliche Ergänzungen)

weitere Hinweise: Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.
Beschriften Sie jedes Blatt mit Name und Matrikelnr.

Name	Vorname	Matr. Nummer

	mögliche Punktezahl	erreichte Punktezahl
Aufgabe 1	14	
Aufgabe 2	25	
Aufgabe 3	21	
Gesamt	60	
	Note	

!!Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar!!

Viel Erfolg!

Name:

Matrikelnummer:

Kurzaufgaben 1.) 14 Punkte

Kurzaufgabe 1a.) 4 Punkte

Zeichnen Sie qualitativ die geforderten Verläufe für das abgebildete Rohrsystem in die dafür vorgesehenen Graphen ein. Die Verläufe sollen über den Querschnitt gemittelte Strömungsgrößen darstellen. Es handelt sich um eine inkompressible Strömung. Alle Querschnittsverläufe zwischen den markierten Abschnitten können vereinfacht als linear angenommen werden.

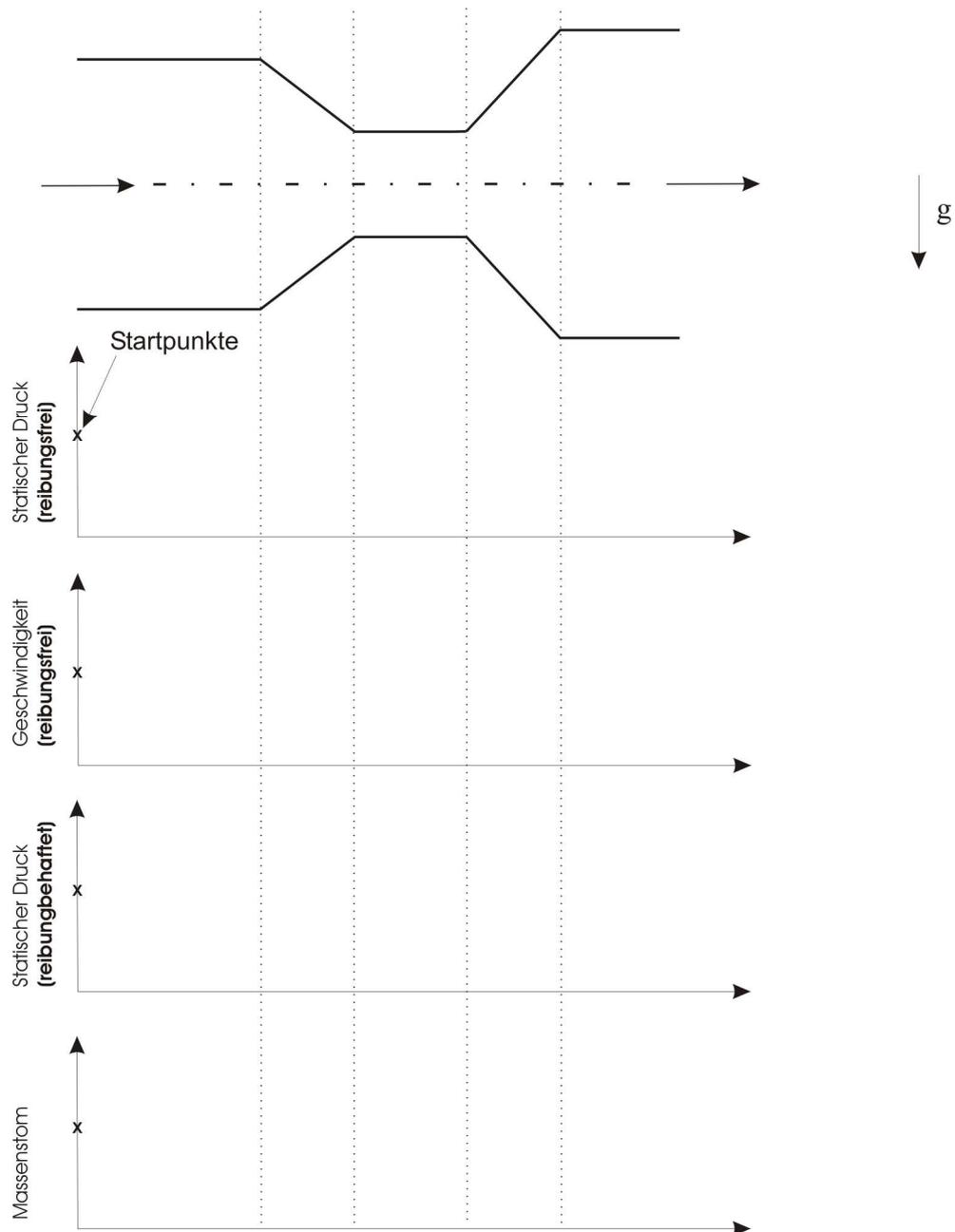


Abbildung 1

Name:

Matrikelnummer:

Kurzaufgabe 1b.) 6 Punkte

I.)

Geben Sie den proportionalen Zusammenhang des Druckverlustes einer voll ausgebildeten Rohrströmung von der Strömungsgeschwindigkeit c für die drei unterschiedlichen Strömungsformen an:

1.) laminare Strömung

2.) turbulente Strömung in hydraulisch glatten Rohren

3.) turbulente Strömung in hydraulisch vollkommen rauhen Rohren

Name:

Matrikelnummer:

II.)

Zeichnen Sie qualitativ die unter I.) hergeleiteten Abhängigkeiten des Druckverlustes Δp von der Strömungsgeschwindigkeit c in Abbildung 2 ein. Zeichnen Sie den Verlauf der laminaren Rohrströmung und der turbulenten Strömung in hydraulisch glatten Rohren als durchgezogene Linie. Der Verlauf der turbulenten Strömung in hydraulisch vollkommen rauen Rohren ist als gestrichelte Linie zu zeichnen.

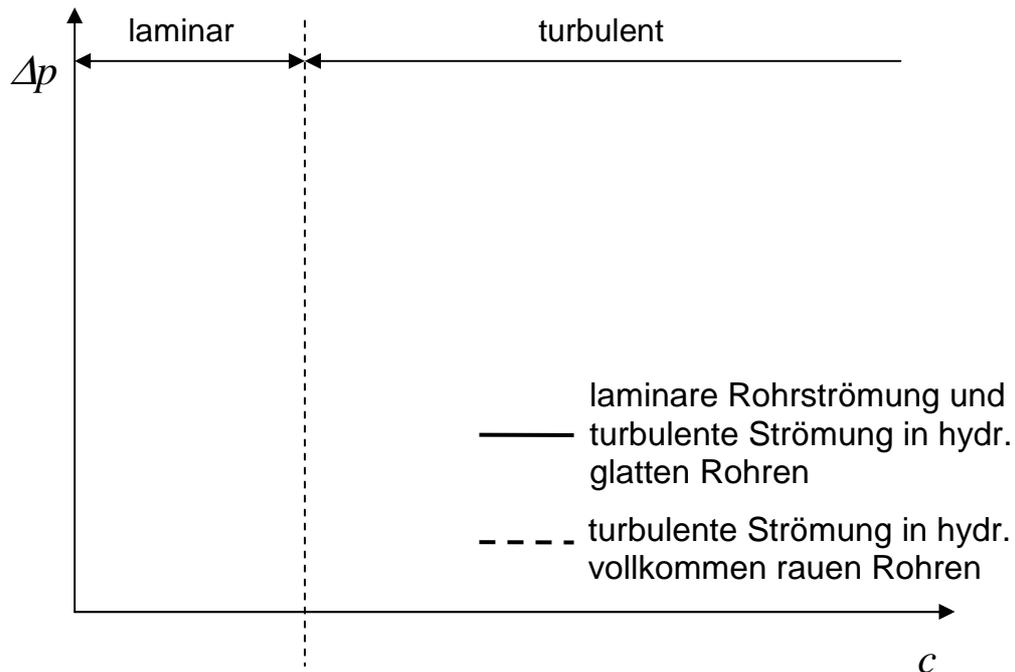


Abbildung 2

Name:

Matrikelnummer:

Kurzaufgabe 1c.) 4 Punkte

Kreuzen Sie richtige Aussagen an:

Stromfadentheorie

- die Bahnlinie entspricht dem Strömungsverlauf eines Fluidteilchens
- im instationären Zustand gilt Stromlinie = Bahnlinie
- Der Stromfaden ist die dreidimensionale Betrachtungsweise der Zustände in der Mitte einer Stromröhre
- in einer Stromröhre gilt das Prinzip der Massenerhaltung

Wirbelströmungen

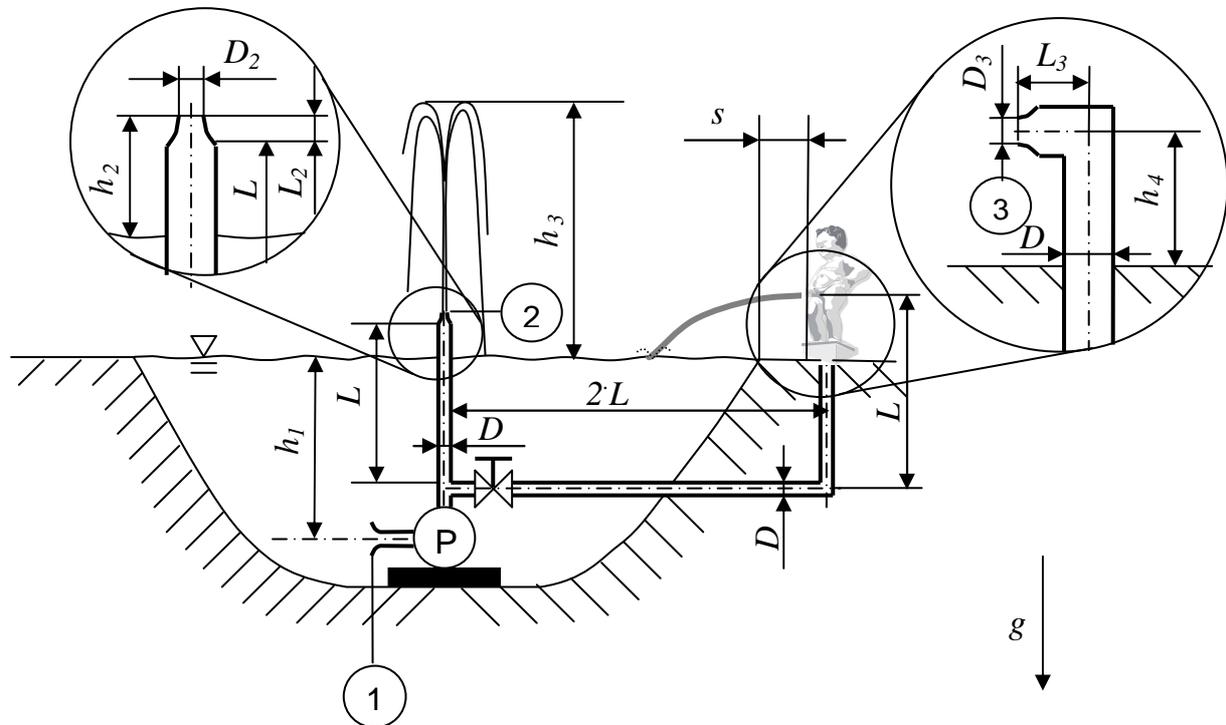
- Festkörperwirbel sind drehungsfreie Strömungen
- Potentialwirbel sind drehungsfreie Strömungen
- der reale Wirbel ist eine Kombination aus Festkörper – und Potentialwirbel
- Festkörperwirbel und Potentialwirbel sind drehungsbehaftete Strömungen

Laminare Rohrströmung

- in einer laminaren Rohrströmung ist das Geschwindigkeitsprofil über den Querschnitt gleichförmig
- die höchste Geschwindigkeit kann in der Mitte des Rohres vermutet werden
- in Wandnähe erhält man die höchste Geschwindigkeit
- das Geschwindigkeitsprofil ist voll ausgebildet, wenn in der Rohrachse die Grenzschichten zusammen wachsen

Welche Bezeichnungen im Zusammenhang mit Viskositäten gibt es

- dynamische Viskosität
- hydroplastische Viskosität
- kinematische Viskosität
- Schubspannungviskosität

Aufgabe 2.) 25 Punkte**Gartenteich****Abbildung 3**

In einem Teich nach Abbildung 3 wird sowohl eine Fontäne als auch ein Manneken Pis mit einer Teichpumpe betrieben. Die Ansaugung der Pumpe P mit dem mechanischen Wirkungsgrad $\eta_p=0,7$ befindet sich auf dem Grund des Teiches in einer Wassertiefe von $h_1=4,5\text{ m}$. Das Wasser wird durch ein Rohr mit dem Durchmesser $D=10\text{ cm}$ und der Länge $L=5\text{ m}$ an die Umgebung gefördert und dort als Fontäne mit der Gesamthöhe h_3 ausgestoßen. Am Austritt des Rohres befindet sich eine Düse mit dem Austrittsdurchmesser $D_2=5\text{ cm}$. Zusätzlich zur Fontäne kann optional ein Manneken Pis betrieben werden. Die Wasserversorgung des Manneken Pis erfolgt durch ein Rohr mit dem Durchmesser D an dessen Ende sich eine Düse mit dem Austrittsdurchmesser $D_3=4\text{ cm}$ befindet. Die Versorgung des Manneken Pis ist an ein T-Stück mit einem Entnahmeventil unmittelbar hinter dem Auslass der Pumpe angeschlossen.

Name:

Matrikelnummer:

Für alle Aufgabenteile ist die Strömung als vollständig ausgebildete Rohrströmung und als inkompressibel anzunehmen. Druckverluste durch Rohrbögen und Düsen, infolge des Ansaugvorgangs, in der Ansaugstrecke und durch das T-Stück sind zu vernachlässigen. Für die Berechnung des Druckverlustes in der Rohrleitung, mit welcher die Fontäne versorgt wird, ist die Länge L zu verwenden. Die Abmessungen des T-Stücks sind für alle Aufgabenteile vernachlässigbar. Der Umgebungsdruck beträgt $p_u=10^5 \text{ Pa}$. Die Längen L_2 und L_3 der Düsen sind wesentlich geringer als die Rohrlängen und tragen nicht zum Druckverlust bei ($L_2 \ll L$ und $L_3 \ll L$). Die Erdbeschleunigung beträgt $g=9,81 \text{ m/s}^2$.

Gegeben für alle Aufgabenteile:

Geometrische Größen:

$$D = 10 \text{ cm}; \quad D_2 = 5 \text{ cm}; \quad D_3 = 4 \text{ cm}; \quad L = 5 \text{ m}; \quad h_1 = 5 \text{ m}; \quad h_2 = 0,5 \text{ m};$$

$$h_4 = 1,5 \text{ m}; \quad s = 2 \text{ m}; \quad L_2 \ll L; \quad L_3 \ll L$$

Stoffwerte:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3; \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s};$$

Weitere:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2; \quad p_u = 10^5 \text{ Pa}; \quad \eta_P = 0,7$$

2.1) Wellenleistung der Pumpe (5 Punkte)

Das Entnahmeventil ist geschlossen. Berechnen sie die Wellenleistung P_{Welle} der Pumpe, so dass sich eine Fontäne mit der Höhe $h_3 = 10 \text{ m}$ ausbildet. Die gesamte Strömung sei reibungsfrei.

Gegeben für Aufgabenteil 2.1)

$$h_3 = 10 \text{ m}$$

Name:

Matrikelnummer:

2.2) Druckverlust (6 Punkte)

Das Entnahmeventil wird geöffnet. Die Rohrströmung sei reibungsbehaftet und infolge des jahrelangen Betriebs beträgt die Rauigkeit beider Rohrleitungen $k_s = 0,4 \text{ mm}$. Berechnen Sie den gesamten Druckverlust des Rohrleitungssystems (Versorgungsleitung Fontäne und Manneken Pis), wenn im Austrittsquerschnitt der Düse des Manneken Pis die Austrittsgeschwindigkeit $c_3 = 12 \text{ m/s}$ beträgt und in der Ansaugstrecke der Pumpe ein Volumenstrom von $\dot{V}_{\text{Pumpe}} = 144 \text{ m}^3 / \text{h}$ gemessen wird.

Gegeben für Aufgabenteil 2.2)

$$k_s = 0,4 \text{ mm}; \quad \dot{V}_{\text{Pumpe}} = 144 \text{ m}^3 / \text{h}; \quad c_3 = 12 \text{ m/s}$$

2.3) Normalkraft (9 Punkte)

Wie groß ist die Normalkraft F_N auf jede Schraube des Verbindungsflansches der Düse des Manneken Pis, wenn in Punkt 3 gemäß Abbildung 4 die Strömungsgeschwindigkeit $c_3 = 10 \text{ m/s}$ beträgt? Auf den Umfang des Verbindungsflansches sind 4 Schrauben verteilt. Reibungskräfte können vernachlässigt werden.

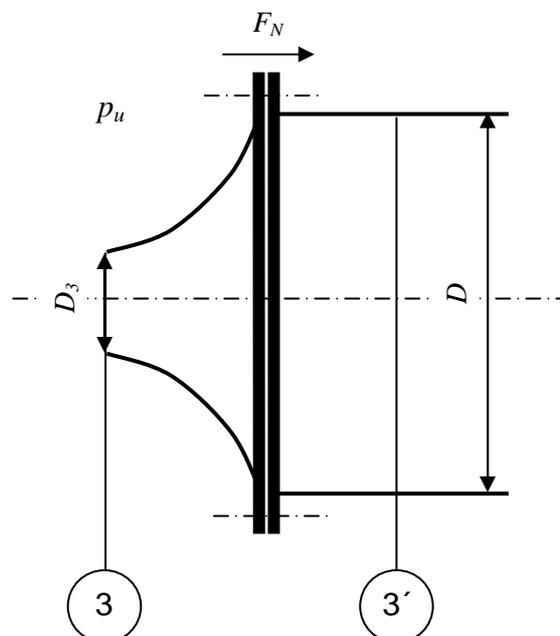


Abbildung 4

Gegeben für Aufgabenteil 2.3)

$$c_3 = 10 \text{ m/s}$$

Name:

Matrikelnummer:

2.4) Strahlverlauf (5 Punkte)

Berechnen Sie den Massenstrom im Austritt der Düse des Manneken Pis, so dass der Wasserstrahl die Teichgrenze im Abstand $s=2\text{ m}$ vom Austrittsquerschnitt der Düse gerade noch trifft. Reibungskräfte zwischen dem Wasserstrahl und der Umgebungsluft sind zu vernachlässigen.

Gegeben für Aufgabenteil 2.4)

$$s = 2\text{ m}$$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 3.) 21 Punkte

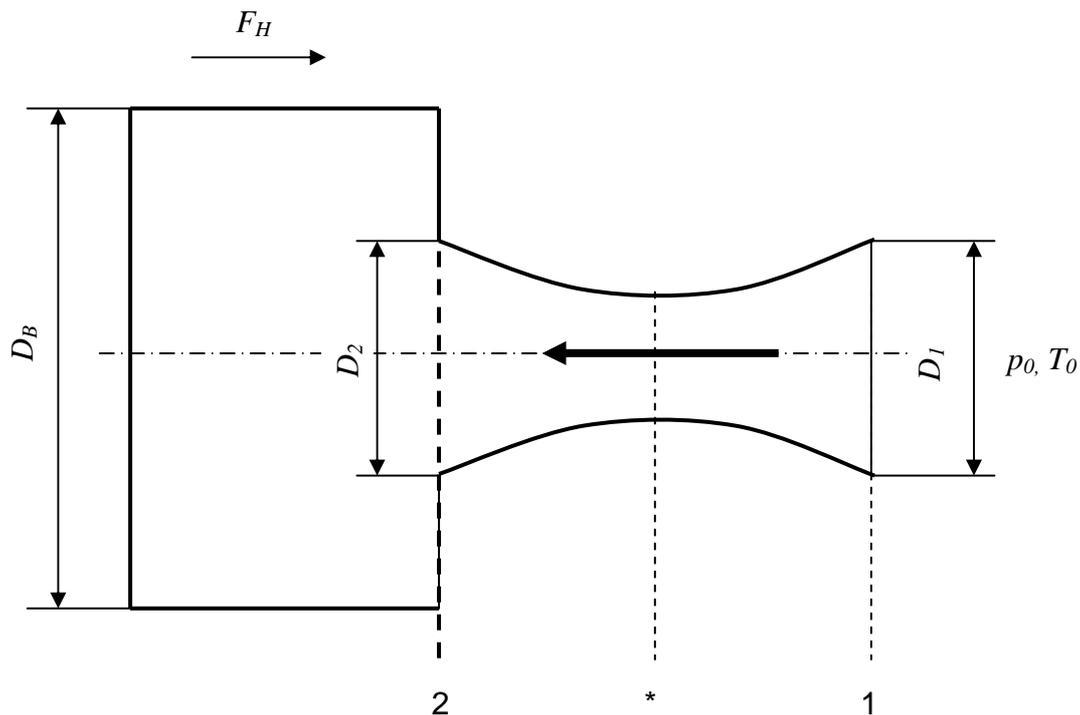


Abbildung 5

Gegeben ist ein kreisrunder Behälter mit dem Durchmesser $D_B = 2$ m. Durch eine Laval-Düse mit dem Eintrittsquerschnitt A_1 , dem engsten Querschnitt $A^* = 10^{-4} \text{ m}^2$ und dem Austrittsquerschnitt A_2 strömt Luft aus der Umgebung, Ruhezustand $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $T_0 = 293 \text{ K}$, in den Behälter.

Die Luft kann als ideales Gas mit $R_L = 287 \text{ J/(kg K)}$ und $\kappa = 1,4$ betrachtet werden.

Im Folgenden soll bei allen Teilaufgaben von einer isentropen Strömung in der Düse ausgegangen werden.

Gegeben für alle Aufgabenteile:

Geometrische Größen:

$$D_B = 2 \text{ m}; \quad A^* = 10^{-4} \text{ m}^2$$

Stoffwerte:

$$R_L = 287 \text{ J/(kg K)}; \quad \kappa = 1,4$$

Weitere:

$$p_0 = 10^5 \text{ Pa}; \quad T_0 = 293 \text{ K}$$

Name:

Matrikelnummer:

3.1) Größen in Querschnitt 2 (11 Punkte)

Bestimmen Sie für den Beginn des Einströmvorganges die Machzahl Ma_2 , die Temperatur T_2 , die Geschwindigkeit c_2 , den einströmenden Massenstrom \dot{m} und die Querschnittsfläche A_2 . Die Düse ist so ausgelegt, dass sich zu Beginn des Einströmvorganges im Querschnitt 2 der Druck $p_2=0,25 \cdot p_0$ einstellt.

Gegeben für Aufgabenteil 3.1)

$$p_2=0,25 \cdot p_0$$

3.2) Haltekraft (10 Punkte)

Die Mach-Zahl im Querschnitt 1 beträgt $Ma_1=0,3$. Der Durchmesser D_1 des Querschnitts 1 der Laval-Düse entspricht dem Durchmesser D_2 des Querschnitts 2 und beträgt $D_1=D_2=3 \text{ cm}$. Berechnen sie die Haltekraft F_H gemäß Abbildung 5.

Gegeben für Aufgabenteil 3.2)

$$Ma_1=0,3; \quad D_1=D_2=3 \text{ cm}$$

Name:

Matrikelnummer:

Leibniz Universität Hannover
Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik
Prof. Dr.-Ing. J. Seume

Klausur Herbst 2008
„Strömungsmechanik I“

Lösung

Kurzaufgabe 1b.)

I.)

1.) laminare Strömung

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \rightarrow \lambda \propto w^{-1}$$

$$\Delta p \propto \lambda \cdot w^2 \rightarrow \Delta p \propto w$$

2.) turbulente Strömung in hydraulisch glatten Rohren

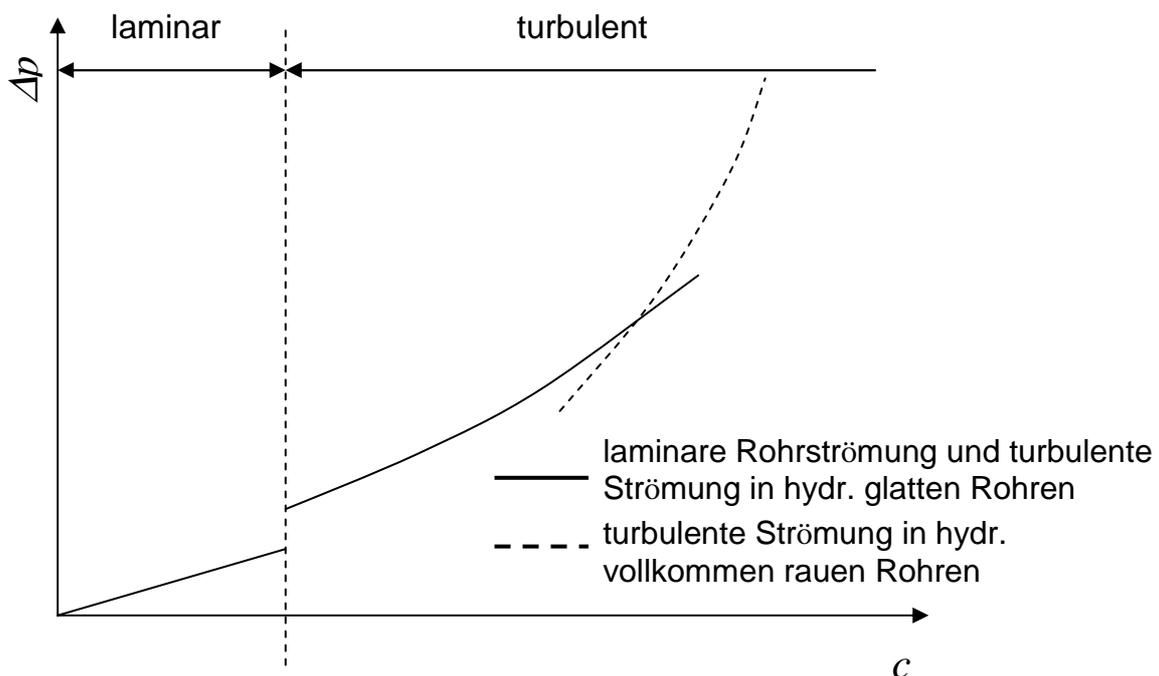
$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{\frac{1}{4}}} \rightarrow \lambda \propto w^{-\frac{1}{4}}$$

$$\Delta p \propto \lambda \cdot w^2 \rightarrow \Delta p \propto w^{\frac{7}{4}}$$

3.) turbulente Strömung in hydraulisch rauen Rohren

$$\lambda \neq f(\text{Re}) \rightarrow \Delta p \propto w^2$$

II.)



Name:

Matrikelnummer:

Kurzaufgabe 1c.) Punkte

Kreuzen Sie richtige Aussagen an:

Stromfadentheorie

- √ die Bahnlinie entspricht dem Strömungsverlauf eines Fluidteilchens
- √ in einer Stromröhre gilt das Prinzip der Massenerhaltung

Wirbelströmungen

- √ Potentialwirbel sind drehungsfreie Strömungen
- √ der reale Wirbel ist eine Kombination aus Festkörper – und Potentialwirbel

Laminare Rohrströmung

- √ die höchste Geschwindigkeit kann in der Mitte des Rohres vermutet werden
- √ das Geschwindigkeitsprofil ist voll ausgebildet, wenn in der Rohrachse die Grenzschichten zusammen wachsen

Welche Bezeichnungen im Zusammenhang mit Viskositäten gibt es

- √ dynamische Viskosität
- √ kinematische Viskosität

2.1) Wellenleistung der Pumpe (5 Punkte)

Strömungsgeschwindigkeit im Düsenaustritt:

Bernoulli von 2 bis h_3 :

$$\rho \cdot \frac{c_2^2}{2} = \rho \cdot g \cdot (h_3 - h_2) \quad (1)$$

Auflösen nach c_2 :

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_3 - h_2)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (10m - 0,5m)} = 13,65 \text{ m/s} \quad (2)$$

Berechnung der Pumpenleistung:

Bernoulli von 1->2:

$$p_1 + \rho \cdot \frac{c_1^2}{2} + \frac{P_{Pumpe}}{\dot{V}} = p_2 + \rho \cdot \frac{c_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot (h_1 + h_2) \quad (3)$$

Für den Volumenstrom folgt:

$$\dot{V} = c_2 \cdot A_2 = c_2 \cdot \pi \cdot \frac{D_2^2}{4} = 13,65 \text{ m/s} \cdot \pi \cdot \frac{(0,05 \text{ m})^2}{4} = 0,0268 \text{ m}^3/\text{s} \quad (4)$$

Statischer Druck im Eintrittsquerschnitt:

$$p_1 = p_u + \rho \cdot g \cdot h_1 \quad (5)$$

Statischer Druck im Querschnitt 2:

$$p_2 = p_u = 10^5 \text{ Pa} \quad (6)$$

Geschwindigkeit in Querschnitt 1:

$$c_1 = 0 \quad (7)$$

Auflösen von Gl. (2) nach P_{Pumpe} und einsetzen von Gl. (4)-(7) ergibt:

$$\rho \cdot g \cdot h_1 + p_u + \frac{P_{Pumpe}}{\dot{V}} = p_u + \rho \cdot \frac{c_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot (h_1 + h_2)$$

$$\Rightarrow P_{Pumpe} = \dot{V} \left[\rho \cdot \frac{c_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2 \right] \quad (8)$$

$$\Rightarrow P_{Pumpe} = 0,0268 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \left[1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{(13,65 \text{ m/s})^2}{2} + 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,5 \text{ m} \right] = 2630 \text{ W}$$

Name:

Matrikelnummer:

Mit dem Wirkungsgrad folgt:

$$\eta = \frac{P_{Pumpe}}{P_{Welle}} \Leftrightarrow P_{Welle} = \frac{P_{Pumpe}}{\eta} = \frac{2630W}{0,7} = 3757W \quad (9)$$

2.2) Druckverlust (6 Punkte)

Berechnung des Volumenstroms in Versorgungsleitung Manneken Pis:

$$\dot{V}_3 = c_3 \cdot A_3 = 12m/s \cdot \pi \cdot \frac{(0,04m)^2}{4} = 0,0151m^3/s \quad (10)$$

Für den Volumenstrom in der Versorgungsleitung der Fontäne folgt:

$$\dot{V}_{Pumpe} = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \Leftrightarrow \dot{V}_2 = \frac{144m^3/h}{3600s/h} - 0,0151m^3/s = 0,0249m^3/s \quad (11)$$

Strömungsgeschwindigkeit in Versorgungsleitung Manneken Pis:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_3 A_3 &= \rho \cdot c_{3,Rohr} \cdot A_{Rohr} \Leftrightarrow c_{3,Rohr} = c_3 \cdot \frac{A_3}{A_{Rohr}} \\ \Rightarrow c_{3,Rohr} &= 12m/s \cdot \frac{0,04m}{0,1m} = 1,92m/s \end{aligned} \quad (12)$$

Strömungsgeschwindigkeit in Versorgungsleitung Fontäne:

$$c_{2,Rohr} = \frac{\dot{V}_2}{A_{Rohr}} = \frac{0,0249m^3/s}{\pi \cdot \frac{(0,1m)^2}{4}} = 3,17m/s \quad (13)$$

Druckverlust Versorgungsleitung Fontäne:

$$\Delta p_{Rohr2} = \lambda \cdot \rho \cdot \frac{c_{2,Rohr}^2}{2} \cdot \frac{L}{D} \quad (14)$$

Druckverlust Versorgungsleitung Manneken Pis:

$$\Delta p_{Rohr3} = \lambda \cdot \rho \cdot \frac{c_{3,Rohr}^2}{2} \cdot \frac{3 \cdot L}{D} \quad (15)$$

Reynolds-Zahl in Versorgungsleitung Fontäne:

$$Re_2 = \frac{c_{2,Rohr} \cdot D}{\nu} = \frac{3,17m/s \cdot 0,1m}{10^{-6}m^2/s} = 317296 \quad (16)$$

Reynolds-Zahl in Versorgungsleitung Manneken Pis:

Name:

Matrikelnummer:

$$\text{Re}_3 = \frac{c_{3,\text{Rohr}} \cdot D}{\nu} = \frac{1,92\text{m/s} \cdot 0,1\text{m}}{10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} = 192000 \quad (17)$$

Relative Rauigkeit:

$$k_s / D = \frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{0,1\text{m}} = 4 \cdot 10^{-3} \quad (18)$$

Widerstandszahlen aus Moody-Diagramm:

$$\lambda_2 = 0,029 \quad (19)$$

und

$$\lambda_3 = 0,029. \quad (20)$$

Einsetzen von Gl. (19) und Gl. (20) in Gl. (14) und Gl. (15) ergibt:

- Druckverlust Versorgungsleitung Fontäne:

$$\Delta p_{\text{Rohr}2} = 0,0288 \cdot 1000\text{kg/m}^3 \cdot \frac{(3,17\text{m/s})^2}{2} \cdot \frac{5\text{m}}{0,1\text{m}} = 7236\text{Pa} \quad (21)$$

- Druckverlust Versorgungsleitung Manneken Pis:

$$\Delta p_{\text{Rohr}3} = 0,0290 \cdot 1000\text{kg/m}^3 \cdot \frac{(1,92\text{m/s})^2}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5\text{m}}{0,1\text{m}} = 8011\text{Pa} \quad (22)$$

Für den Gesamtdruckverlust des Rohrleitungssystems folgt:

$$\Delta p_{\text{ges}} = \Delta p_{\text{Rohr}2} + \Delta p_{\text{Rohr}3} = 7236\text{Pa} + 8011\text{Pa} = 15247\text{Pa} \quad (23)$$

Name:

Matrikelnummer:

2.3) Normalkraft (9 Punkte)

Berechnen der Strömungsgrößen vor der Düse des Manneken Pis:

Bernoulli von 3' → 3:

$$p_{3, \text{vor}} + \rho \cdot \frac{c_{3, \text{vor}}^2}{2} = p_3 + \rho \cdot \frac{c_3^2}{2} \quad (24)$$

Kontinuität:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_3 \cdot A_3 &= \rho \cdot c_{3'} \cdot A_{3'} \\ \Rightarrow c_{3'} &= c_3 \cdot \frac{D_3}{D_{3'}} = 10 \text{ m/s} \cdot \frac{(0,04 \text{ m})^2}{(0,1 \text{ m})^2} = 1,6 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (25)$$

Auflösen von Gl. (24) nach $p_{3'}$ und einsetzen von Gl. (25) ergibt:

$$p_{3'} = p_3 + \rho \left[\frac{c_3^2}{2} - \frac{c_{3'}^2}{2} \right] = 10^5 \text{ Pa} + 1000 \text{ kg/m}^3 \left[\frac{(10 \text{ m/s})^2}{2} - \frac{(1,6 \text{ m/s})^2}{2} \right] = 148720 \text{ Pa} \quad (26)$$

Berechnung des Massenstroms:

$$\dot{m} = \rho \cdot c_3 \cdot A_3 = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s} \cdot \pi \frac{(0,04 \text{ m})^2}{4} = 12,57 \text{ kg/s} \quad (27)$$

Impulsbilanz von 3' → 3:

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 - \dot{I}_{3'} &= p_3 A_3 - p_{3'} A_{3'} - p_u (A_3 - A_{3'}) - F_N \\ \Leftrightarrow F_N &= \dot{m} \cdot (c_3 - c_{3'}) + p_3 A_3 - p_u A_3 - p_u A_{3'} + p_u A_3 \\ \Rightarrow F_N &= 12,57 \text{ kg/s} \cdot (1,6 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}) + 148720 \text{ Pa} \cdot \pi \cdot \frac{(0,1 \text{ m})^2}{4} - 10^5 \text{ Pa} \cdot \pi \cdot \frac{(0,1 \text{ m})^2}{4} \\ \Rightarrow F_N &= 277,1 \text{ N} \end{aligned} \quad (28)$$

Kraft auf eine Schraube:

$$F_{\text{Schraube}} = \frac{F_N}{4} = 69,27 \text{ N} \quad (29)$$

Name:

Matrikelnummer:

2.4) Strahlverlauf (5 Punkte)

Impulsbilanz an einem differentiellen Fluidelement im Wasserstrahl ergibt:

$$dm \cdot a = F_g = dm \cdot g \quad (30)$$

1. Integration:

$$\begin{aligned} c &= \int a dt = \int g dt \\ \Rightarrow c &= g \cdot t \end{aligned} \quad (31)$$

2. Integration

$$\begin{aligned} h &= \int c dt = \int g \cdot t dt \\ \Rightarrow h &= g \cdot t^2 / 2 \end{aligned} \quad (32)$$

Für die Fallzeit folgt aus Gl. (32):

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_4}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5m}{9,81m/s^2}} = 0,553s \quad (33)$$

Für die horizontal zurückgelegte Weglänge s folgt:

$$c_3 = \frac{s}{t} = \frac{2m}{0,553s} = 3,62m/s \quad (34)$$

Für den Massenstrom folgt:

$$\dot{m} = \rho \cdot c_3 \cdot A_3 = 1000kg/m^3 \cdot 3,62m/s \cdot \pi \cdot \frac{(0,04m)^2}{4} = 4,55kg/s \quad (35)$$

3.1) Größen in Querschnitt 2 (11 Punkte)Berechnung der Mach-Zahl Ma_2 in Querschnitt 2

$$\frac{p_0}{p_2} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_2^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

$$\Rightarrow Ma_2 = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1\right]} = \sqrt{\frac{2}{0,4} \left[4^{\frac{0,4}{1,4}} - 1\right]} = 1,56 \quad (36)$$

Für T_2 folgt:

$$T_2 = \frac{T_0}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_2^2} = \frac{293}{1 + \frac{0,4}{2} \cdot 1,56^2} = 197,08 \text{ K} \quad (37)$$

Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Querschnitt 2:

$$a_2 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_2} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 197,08 \text{ K}} = 281,4 \text{ m/s} \quad (38)$$

Geschwindigkeit in Querschnitt 2:

$$c_2 = Ma_2 \cdot a_2 = 1,56 \cdot 281,4 \text{ m/s} = 438,98 \text{ m/s} \quad (39)$$

Berechnung der Querschnittsfläche A_2 mit Conti-Gl.:

$$\dot{m} = \rho^* \cdot c^* \cdot A^* = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2 \quad (40)$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{\rho^* \cdot c^* \cdot A^*}{c_2 \cdot A_2}$$

Dichte ρ_0 der Umgebungsluft:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R_L T_0} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 293 \text{ K}} = 1,19 \text{ kg/m}^3 \quad (41)$$

Name:

Matrikelnummer:

Für die Dichte ρ^* im engsten Querschnitt der Laval-Düse folgt:

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \Rightarrow \rho^* = 0,75 \text{ kg/m}^3 \quad (42)$$

Geschwindigkeit c^* im engsten Querschnitt:

$$c^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa+1} R \cdot T_0} = \sqrt{\frac{2,8}{2,4} \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 293 \text{K}} = 313,22 \text{ m/s} \quad (43)$$

Dichte in Querschnitt 2:

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R_L \cdot T_2} = \frac{0,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 197,08 \text{K}} = 0,44 \text{ kg/m}^3 \quad (44)$$

Einströmender Massenstrom m :

$$\dot{m} = \rho^* c^* A^* = 0,75 \text{ kg/m}^3 \cdot 313,22 \text{ m/s} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 0,024 \text{ kg/s} \quad (45)$$

Für die Querschnittsfläche A_2 folgt aus Gl. (40):

$$A_2 = \frac{\rho^* c^* A^*}{\rho_2 \cdot c_2} = \frac{0,024 \text{ kg/m}^3}{0,44 \text{ kg/m}^3 \cdot 438,98 \text{ m/s}} = 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad (46)$$

3.2) Haltekraft (10 Punkte)

Druck in Querschnitt 1

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$
$$\Rightarrow p_1 = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{\left(1 + \frac{0,4}{2} 0,3^2 \right)^{1,4}} = 93947 \text{ Pa} \quad (47)$$

Temperatur in Querschnitt 1:

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2$$
$$\Rightarrow T_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2} = \frac{293 \text{K}}{1 + \frac{0,4}{2} 0,3^2} = 287,82 \text{K} \quad (48)$$

Dichte in Querschnitt 1:

Name:

Matrikelnummer:

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$
$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} = \frac{\frac{10^5 Pa}{287 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 293 K}}{\left(1 + \frac{0,4}{2} \cdot 0,3^2\right)^{\frac{1}{0,4}}} = 1,14 kg / m^3 \quad (49)$$

Schallgeschwindigkeit in Querschnitt 1:

$$a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 287,82 K} = 340,07 m / s \quad (50)$$

Strömungsgeschwindigkeit in Querschnitt 1:

$$Ma_1 = \frac{c_1}{a_1} \Leftrightarrow c_1 = 0,3 \cdot 340,07 m / s = 102,02 m / s \quad (51)$$

Massenstrom durch Laval-Düse:

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = 1,14 kg / m^3 \cdot 102,02 m / s \cdot \pi \cdot \frac{(0,03 m)^2}{4} = 0,082 kg / s \quad (52)$$

Impulsbilanz:

$$0 = p_1 A_1 + \dot{I}_1 - F_H - p_u \cdot A_B + p_u (A_B - A_2)$$
$$\Rightarrow F_H = p_1 A_1 + \dot{m} \cdot c_1 - p_u \cdot A_2$$
$$\Rightarrow F_H = 93947 Pa \cdot \pi \frac{(0,03 m)^2}{4} + 0,082 kg / s \cdot 102,02 m / s - 10^5 Pa \cdot \pi \frac{(0,03 m)^2}{4} \quad (53)$$
$$\Rightarrow F_H = 4,09 N$$