

Klausur Herbst 2009

„Strömungsmechanik I“

Bearbeitungsdauer: 90 min

zugelassene Hilfsmittel:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- TFD-Formelsammlung (ohne handschriftliche Ergänzungen)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht, => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- mitgebrachtes Papier

weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Beschriften Sie jedes Blatt mit Name und Matrikelnr.

Name	Vorname	Matr. Nummer

	mögliche Punktezahl	erreichte Punktezahl
Aufgabe 1	12	
Aufgabe 2	20	
Aufgabe 3	12	
Aufgabe 4	16	
Gesamt	60	
	Note	

!!Alle Aufgabenteile (X.X) sind unabhängig von einander lösbar!!

Viel Erfolg!

Name:

Matrikelnummer:

Kurzaufgabe 1.) (12 Punkte)

Hinweis: Die Lösungen der Kurzaufgaben sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen. Es gibt bei Kurzaufgaben keine Punkte auf den Rechenweg. Lösungen auf Zetteln werden nicht bewertet!

Kurzaufgabe 1a.) (5 Punkte)

Auf einer masselosen Wippe befindet sich auf der einen Seite die Masse M und auf der anderen Seite ein masseloser Eimer, der stationär mit dem Volumenstrom \dot{V}_0 gefüllt wird. Der Eimer besitzt ein Loch mit dem Durchmesser d . Berechnen Sie die Höhe h und dann die Masse M , so dass sich die Wippe im stationären Gleichgewicht befindet.

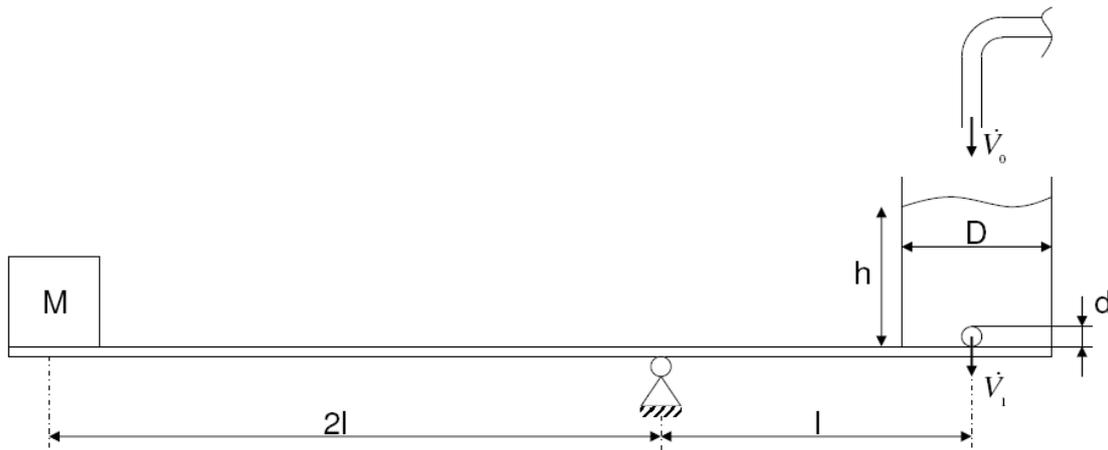


Abbildung 1

Gegeben:

$$l = 0,5m ; \quad d = 0,01m ; \quad D = 0,2m ; \quad \rho = 1000 \frac{kg}{m^3} ; \quad g = 9,81 \frac{m}{s^2} ; \quad \dot{V}_0 = 10 \frac{l}{min}$$

Ergebnis:

h=
M=

Name:

Matrikelnummer:

Kurzaufgabe 1b.) (3 Punkte)

Berechnen Sie, bis zu welcher Mach-Zahl die Dichteänderung einer kompressiblen Strömung maximal 1% beträgt, so dass die Strömung näherungsweise als inkompressibel betrachtet werden kann. Der Isentropenexponent beträgt $\kappa = 1,4$.

Ergebnis:

Ma=

Kurzaufgabe 1c.) (4 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an:

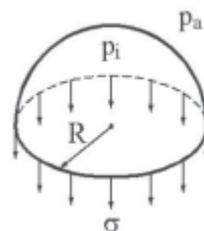
(nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet)

Bei einer Lavaldüse liegt der Geschwindigkeitsgradient $\frac{dc}{dx} > 0$ vor, wenn:

- $\frac{dA}{dx} > 0$, falls $Ma < 1$
- $\frac{dA}{dx} = 0$, falls $Ma < 1$
- $\frac{dA}{dx} > 0$, falls $Ma > 1$
- $\frac{dA}{dx} < 0$, falls $Ma > 1$

Dargestellt ist ein kugelförmiger Wassertropfen. Welcher Zusammenhang muss auf der Oberfläche gelten?

- $P_i > P_a$
- $P_i < P_a$
- $P_i = P_a$
- $P_i = 4/3 * \pi * P_a$



Name:

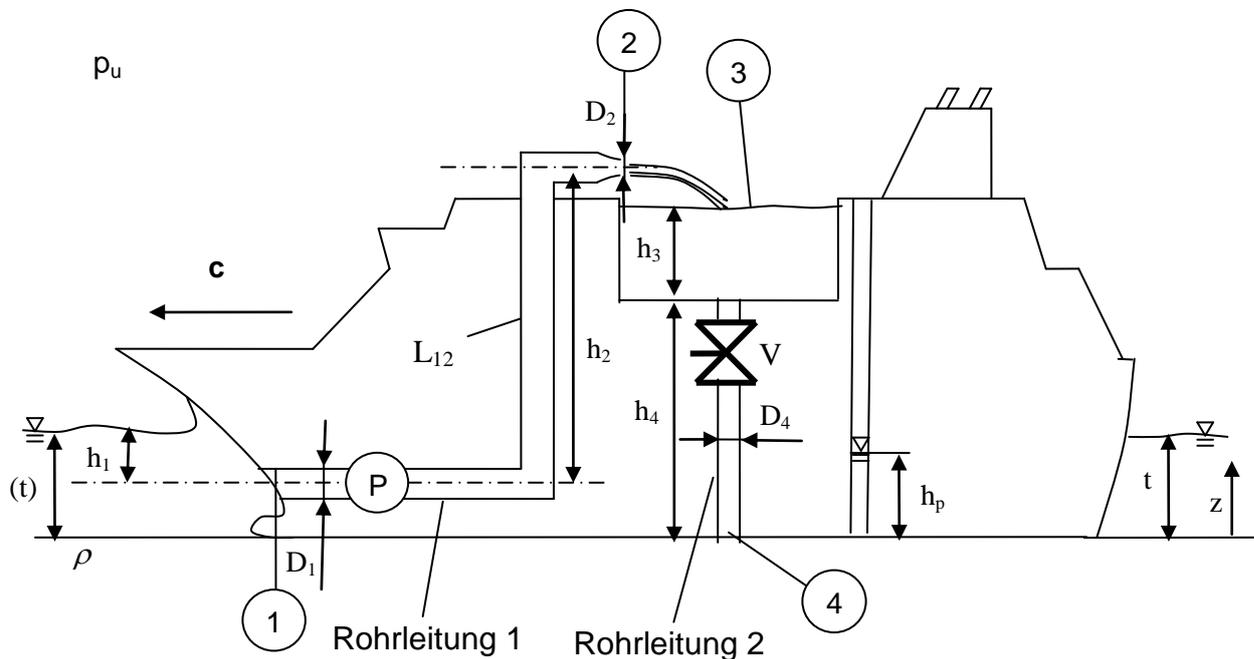
Matrikelnummer:

In der Hydrodynamik gilt:

- der Druck ist konstant
- die Dichte ist konstant
- die Fluidgeschwindigkeit ist größer null
- die Temperatur ist konstant

Es handelt sich um ein Newton'sches Fluid wenn:

- die Schubspannung proportional zur Fluidgeschwindigkeit ist
- die Schubspannung quadratisch zur Schergeschwindigkeit ist
- die Schubspannung proportional zur Schergeschwindigkeit ist
- die Schubspannung exponentiell zur Schergeschwindigkeit ist

Aufgabe 2.) (20 Punkte)**Kreuzfahrtschiff****Abbildung 2**

Gegeben ist ein Kreuzfahrtschiff gemäß Abbildung 2, auf dessen Deck ein Meerwasser-Schwimmbecken der Länge l , Breite b und der Wassertiefe h_3 betrieben wird. Das Schwimmbecken wird durch Rohrleitung 1 gespeist, deren Ansaugöffnung sich in der Wassertiefe h_1 unterhalb der Wasseroberfläche befindet. Die gesamte Länge von Rohrleitung 1 ist L_{12} und der Durchmesser ist D_1 . Am Austritt von Rohrleitung 1 befindet sich eine Düse mit dem Durchmesser D_2 . Das Meerwasser wird durch die Pumpe P mit dem mechanischen Wirkungsgrad η_p gefördert.

Zur Entleerung des Schwimmbeckens wird das Ventil V von Rohrleitung 2 geöffnet. Der Durchmesser von Rohrleitung 2 ist D_4 , die Länge h_4 .

Für alle Aufgabenteile ist die Strömung **als vollständig ausgebildete Rohrströmung** und als **inkompressibel** anzunehmen. Druckverluste durch Rohrbögen und infolge des Ansaugvorgangs sind zu vernachlässigen. Der Umgebungsdruck beträgt p_u . Die Erdbeschleunigung beträgt g . Die Dichte des

Name:

Matrikelnummer:

Meerwassers ist ρ . Die Änderung des Tiefgangs t infolge der Befüllung oder Entleerung des Schwimmbeckens kann vernachlässigt werden.

Gegeben für die Aufgabenteile 2.1. und 2.2.:

Geometrische Größen:

$$l = 15 \text{ m}; \quad b = 5 \text{ m}; \quad D_1 = 0,5 \text{ m}; \quad D_2 = 0,3 \text{ m}; \quad D_4 = 0,3 \text{ m}; \quad L_{12} = 60 \text{ m}; \\ h_1 = 5 \text{ m}; \quad h_2 = 25 \text{ m}; \quad h_4 = 24 \text{ m}; \quad t = 7 \text{ m}$$

Stoffwerte:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3; \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s};$$

Weitere:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2; \quad p_u = 10^5 \text{ Pa}; \quad \eta_P = 0,7$$

2.1) Pumpenleistung (11 Punkte)

a) (9 Punkte)

Das Schiff fährt mit einer Geschwindigkeit von c und das Schwimmbecken wird über Rohrleitung 1 befüllt. Durch Korrosion in der Rohrleitung beträgt die Rauigkeit $k_s = 1 \text{ mm}$. Die Rohrströmung ist reibungsbehaftet. Berechnen Sie die Wellenleistung der Pumpe $P_{P, \text{Welle}}$, wenn das Schwimmbecken innerhalb von $t_{\text{Füll}}$ vollständig bis zu einer Wassertiefe h_3 befüllt werden soll. Der Druckverlust durch die Düse am Austritt von Rohrleitung 2 ist zu vernachlässigen.

Gegeben für Aufgabenteil 2.1 a)

$$c = 5 \text{ m/s}; \quad k_s = 1 \text{ mm}; \quad h_3 = 2 \text{ m} \quad t_{\text{Füll}} = 10 \text{ Minuten}$$

b) (2 Punkte)

Wie schnell muss das Schiff mindestens fahren, so dass der Höhenunterschied für die Befüllung des Schwimmbeckens gerade überwunden und keine Pumpe benötigt wird?

Name:

Matrikelnummer:

2.2) Entleerungsvorgang (9 Punkte)

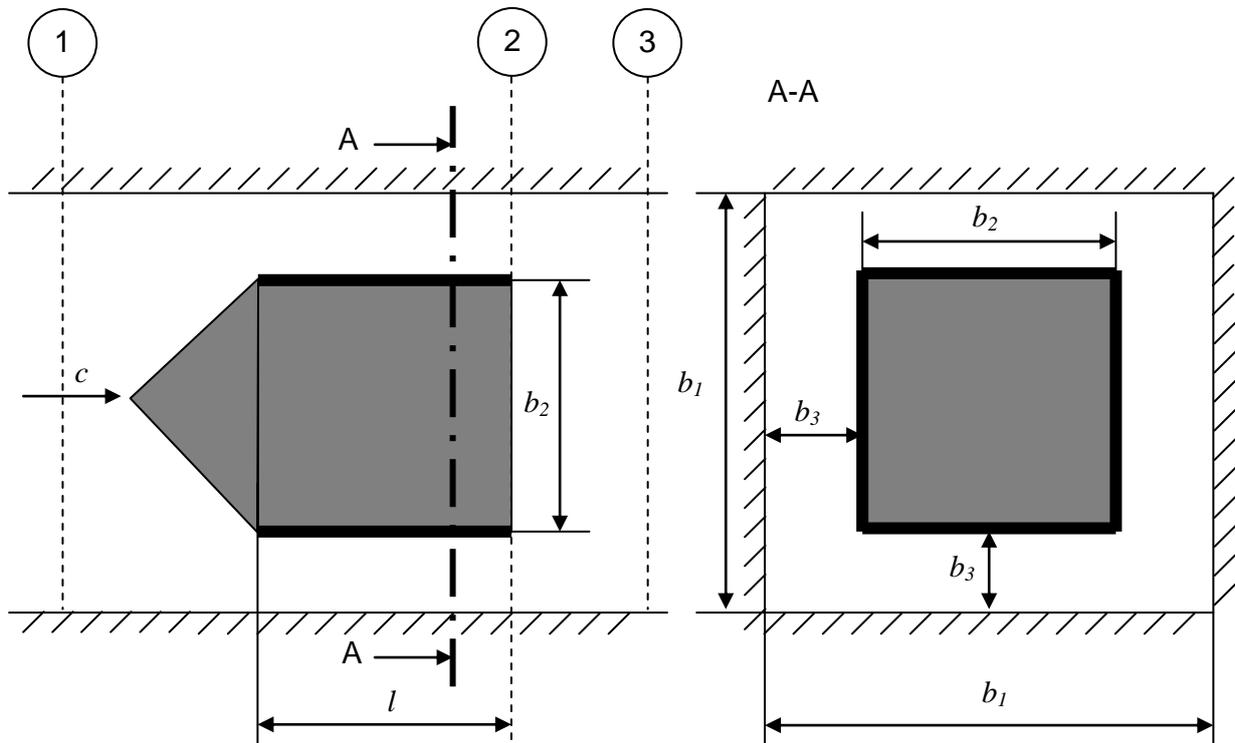
Das Schwimmbecken wird nicht mehr befüllt und soll über Rohrleitung 2 entleert werden. Der Tiefgang t des stehenden Schiffes wird anhand einer Wassersäule in einer dünnen Rohrleitung abgelesen, deren untere Öffnung sich im Kiel und deren obere Öffnung sich im Deck des Schiffes befindet (siehe Abbildung 2). Bei fahrendem Schiff mit der momentanen Geschwindigkeit c stellt sich in dem dünnen Rohr eine Wassersäule der Höhe $h_p=6,5$ m ein. Berechnen Sie die Entleerungszeit des Schwimmbeckens (nur das Absinken des Wasserspiegels um die Höhe h_3), wenn das Schwimmbecken zu Beginn der Entleerung bis zur Höhe h_3 befüllt ist. Die Rohrströmung sei reibungsfrei.

Gegeben für Aufgabenteil 2.2)

$$h_3 = 2 \text{ m} \qquad h_p = 6,5 \text{ m}$$

Hinweis:

$$\int_1^2 \left((a + b \cdot x)^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left[\frac{2}{b} \cdot (a + b \cdot x)^{\frac{1}{2}} \right]_1^2$$

Aufgabe 3.) (12 Punkte)**Widerstandskräfte****Abbildung 3**

Ein Körper gemäß Abbildung 3 mit quadratischem Querschnitt der Kantenlänge b_2 wird in einem Wasserkanal mit quadratischem Querschnitt der Kantenlänge b_1 mit der Strömungsgeschwindigkeit c angeströmt. Der Abstand des Körpers in horizontaler und vertikaler Richtung von den Kanalwänden ist b_3 . Durch die plötzliche Querschnittserweiterung hinter dem Körper treten Verluste durch Wirbelbildung und Energiedissipation auf. Der Einfluss der Schwerkraft auf die Druckverteilung im Wasser kann vernachlässigt werden.

Gegeben für alle Aufgabenteile:

Geometrische Größen:

$$b_1 = 1,5 \text{ m}; \quad b_2 = 0,75 \text{ m}; \quad l = 2 \text{ m}$$

Stoffwerte:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3; \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Weitere:

$$c = 3 \text{ m/s}$$

Name:

Matrikelnummer:

3.1) Widerstandskraft (5 punkte)

Berechnen Sie die Druckdifferenz p_1-p_2 und den Widerstand des Körpers im Wasser, wenn das Modell mit der Geschwindigkeit c angeströmt wird. Die Reibungskräfte am Schiffsmodell und an den Kanalwänden können vernachlässigt werden.

3.2) Reibungswiderstand (7 Punkte)

Berechnen Sie den Reibungswiderstand der laminaren Grenzschichtströmung, der turbulenten Grenzschichtströmung und den gesamten Reibungswiderstand des Körpers für die gegebene Anströmgeschwindigkeit c . Hierzu soll nur die Wandreibung an den fett gekennzeichneten Flächen berechnet werden. Vereinfachend kann angenommen werden, dass sich an den vier fett gekennzeichneten Flächen die Strömungsgrenzschicht jeweils wie auf einer ebenen Platte ausbildet. Die Verdrängungswirkung der Grenzschicht kann vernachlässigt werden, so dass die Strömungsgeschwindigkeit im Spalt zwischen Schiffsmodell und Kanal als konstant angenommen werden kann. Die kritische Reynolds-Zahl der Grenzschichtströmung ist $Re_{krit} = 5 \cdot 10^5$.

Gegeben für Aufgabenteil 3.2)

$$Re_{krit} = 5 \cdot 10^5$$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4.) (16 Punkte)

Rotor

Mit einem Versuchsaufbau gemäß Abbildung 4 sollen Tragflügel untersucht werden. Am Ende jedes Tragflügels befindet sich eine Düse. Die Strecke der Profilober- und Unterseite zusammen ist s_{Profil} . Die Düsen werden mit Luft aus einem Druckluftspeicher innerhalb der Tragflächenprofile durchströmt. Nehmen Sie die Strömung durch die Düse als stationär und isentrop an. Die Luft kann als ideales Gas mit R und κ betrachtet werden.

Hinweis: $d_s \ll r$.

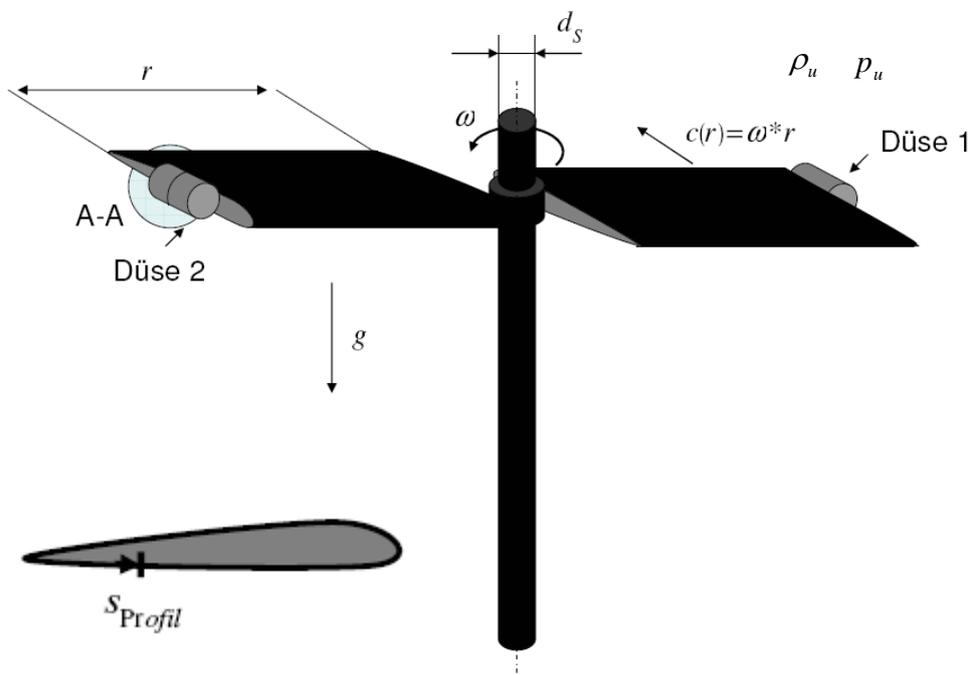


Abbildung 4

Gegeben für alle Aufgabenteil:

Geometrische Größen:

$$s_{\text{Profil}} = 0,1\text{m} \quad r = 0,5\text{m}$$

Stoffwerte:

$$\rho_u = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \kappa = 1,4 \quad R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} * \text{K}}$$

Weitere:

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad p_U = 100000\text{Pa}$$

Name:

Matrikelnummer:

4.1.) Konvergente Düse (8 Punkte)

Der Rotor soll so ausgelegt werden, dass für eine Drehzahl n das durch die Düsen erzeugte Drehmoment den Strömungswiderstand der Tragflügelprofile ausgleicht. Aus dem Druckluftspeicher innerhalb der Tragflächenprofile (Ruhezustand: p_0, T_0) strömt Luft aus den konvergenten Düsen in die Umgebung, gemäß Abbildung 5. Die Luft wird dabei auf Umgebungsdruck entspannt. Im engsten Querschnitt der Düse beträgt die Strömungsgeschwindigkeit $Ma=1$. Die Lagerung des Rotors erzeugt für diese Drehzahl ein Reibmoment M_R . Berechnen Sie die Widerstandskraft F_w durch die Anströmung der Tragflügelprofile, die erforderliche Schubkraft der Düsen, den minimalen Düsenquerschnitt A_{\min} und den Massenstrom $\dot{m}_{Düse}$.

Vereinfachend wird angenommen, dass die gesamte Widerstandskraft bei $x=r/2$ angreift und der Widerstandsbeiwert c_w unabhängig von der Anströmgeschwindigkeit des Tragflügelprofils ist.

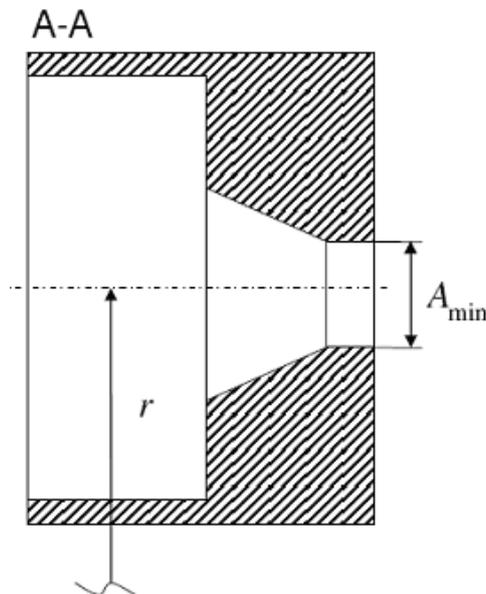


Abbildung 5

Größen für den Aufgabenteil 4.1

$$c_w = 0,08$$

$$T_0 = 293K$$

$$p_0 = 300000Pa$$

$$M_R = 10Nm$$

$$n = 5000 \frac{U}{\text{min}}$$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4.2) Laval-Düse (8 Punkte)

A-A

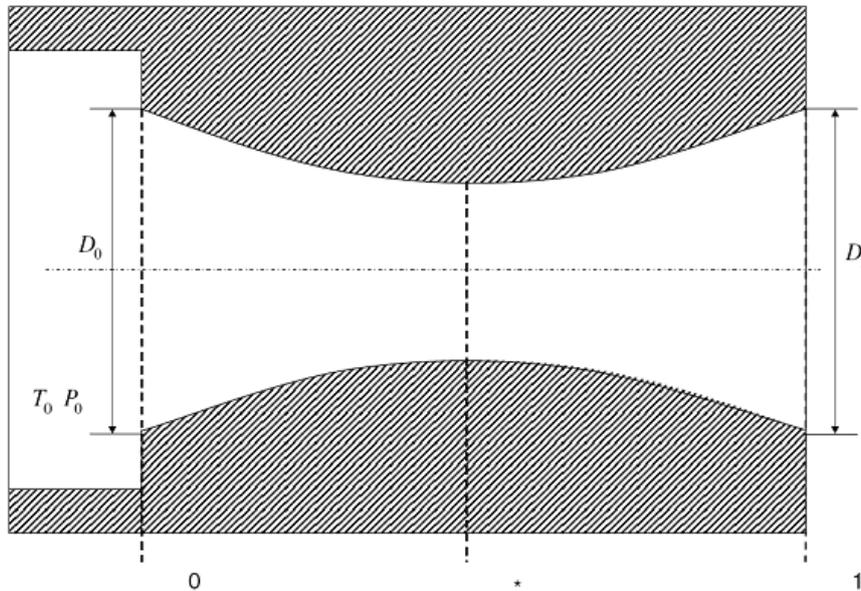


Abbildung 6

Statt konvergenten Düsen werden nun, wie in Abbildung 6 dargestellt, Laval-Düsen verwendet. Aus dem Druckluftspeicher innerhalb der Tragflächenprofile (Ruhezustand: p_0, T_0) strömt Luft durch die Lavaldüsen ($D_0 = D_1$) in die Umgebung. Die Luft wird dabei auf Umgebungsdruck entspannt und gleichzeitig auf Überschallgeschwindigkeit beschleunigt. Die Luft kann als ideales Gas betrachtet werden. Die Strömung ist stationär und isentrop.

Bestimmen Sie ρ_0, ρ^*, c^* und \dot{m} im engsten Querschnitt. Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit c_1 am Ende der Düse? Wie groß muss der Austrittsdurchmesser D_1 der Düse gewählt werden, damit eine vollständige Expansion auf Umgebungsdruck stattfindet? Welchen Schub erzeugt eine Düse im Auslegungszustand?

Größen für den Aufgabenteil 4.2:

$$T_0 = 293K \quad p_0 = 200000Pa \quad A^* = 0,002m^2$$

Name:

Matrikelnummer:

Leibniz Universität Hannover
Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik
Prof. Dr.-Ing. J. Seume

Klausur Herbst 2009
„Strömungsmechanik I“

Lösung

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1.) Kurzfragen (12 Punkte)

Kurzaufgabe 1a.) (5 Punkte)

Konti:

$$\dot{V}_0 * \rho = \pi * \frac{d^2}{4} * \rho * c_1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\dot{V}_0}{\pi * \frac{d^2}{4} * \rho} = \frac{\frac{10 \text{ l}}{60 \text{ s}} * 0,001 \frac{\text{m}^3}{\text{l}}}{\pi * \frac{0,01^2 \text{m}^2}{4}} = 2,1221 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Bernouli von 0' bis 1':

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} + gz_0 = \frac{c_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow z_0 - z_1 = h = \frac{c_1^2}{2 * g} = \frac{2,1221^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,2295 \text{m}$$

Berechnung von m_{Eimer} :

$$m_{\text{Eimer}} = \pi * \frac{D^4}{4} * h * \rho = \pi * \frac{0,2^2 \text{m}^2}{4} * 0,2295 \text{m} * 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 7,2106 \text{kg} \quad (3)$$

Momentensumme um die Lagerstelle:

$$M * g * 2 * l = m_{\text{Eimer}} * g * l \quad (4)$$

$$\Rightarrow M = \frac{m_{\text{Eimer}}}{2} = \frac{7,2106 \text{kg}}{2} = 3,6053 \text{kg}$$

Kurzaufgabe 1b) (3 Punkte)

Berechnung des Quotienten der Dichte:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\rho + \Delta\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho} = 1,01 \quad (1)$$

Name:

Matrikelnummer:

Berechnung der Machzahl:

$$Ma = \sqrt{\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] \frac{2}{\kappa-1}} = \sqrt{\left[1,01^{1,4-1} - 1 \right] \frac{2}{1,4-1}} = 0,14 \quad (2)$$

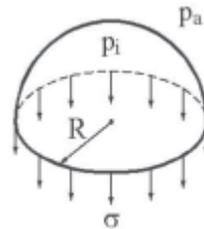
Kurzaufgabe 1c.) (4 Punkte)

Bei einer Lavaldüse liegt der Geschwindigkeitsgradient $\frac{dc}{dx} > 0$ vor, wenn

- $\frac{dA}{dx} > 0$, falls $Ma < 1$
- $\frac{dA}{dx} = 0$, falls $Ma < 1$
- $\frac{dA}{dx} > 0$, falls $Ma > 1$
- $\frac{dA}{dx} < 0$, falls $Ma > 1$

Dargestellt ist ein kugelförmiger Wassertropfen. Welcher Zusammenhang muss auf der Oberfläche gelten?

- $P_i > P_a$
- $P_i < P_a$
- $P_i = P_a$
- $P_i = 4/3 * \pi * P_a$



In der Hydrodynamik gilt:

- der Druck ist konstant
- der Dichte ist konstant
- die Fluidgeschwindigkeit ist größer null
- die Temperatur ist konstant

Name:

Matrikelnummer:

Es handelt sich um ein Newton'sches Fluid wenn:

- die Schubspannung proportional zur Fluidgeschwindigkeit ist
- die Schubspannung quadratisch zur Schergeschwindigkeit ist
- die Schubspannung proportional zur Schergeschwindigkeit ist
- die Schubspannung exponential zur Schergeschwindigkeit ist

Aufgabe 2.) Kreuzfahrtschiff (20 Punkte)

2.1 Pumpenleistung (11 Punkte)

a) (9 Punkte)

Gesucht: Wellenleistung der Pumpe

Volumenstrom:

$$\dot{V} = \frac{b \cdot l \cdot h_3}{t_{\text{Fuell}}} = \frac{5m \cdot 15m \cdot 2m}{10\text{Min.} \cdot 60\text{Sek.}/\text{Min.}} = 0,25 \frac{m^3}{s} \quad (1)$$

(1P)

Bernoulli von 1->2

$$p_1 + \rho \frac{c_1^2}{2} + \frac{P_{P,mechan.}}{\dot{V}} = p_2 + \rho \frac{c_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2 + \Delta p \quad (2)$$

(1P)

Mit:

$$p_1 = p_u + \rho \cdot g \cdot h_1 = 10^5 Pa + 1000kg/m^3 \cdot 9,81m/s^2 \cdot 5m = 149050Pa \quad (3)$$

(0,5 P.)

$$p_2 = p_u = 10^5 Pa \quad (4)$$

(0,5 P.)

Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit im Austrittsquerschnitt der Düse:

$$\dot{V} = c_2 \cdot A_2 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow c_2 = \frac{\dot{V}}{A_2} = \frac{0,25m^3/s}{\pi \cdot (0,3m)^2 / 4} = 3,54m/s \quad (1 P.)$$

Druckverlust in Rohrleitung 1:

$$\Delta p = \lambda \cdot \rho \cdot \frac{c_{12}^2}{2} \cdot \frac{L_{12}}{D_1} \quad (6)$$

(0,5P)

Strömungsgeschwindigkeit in Rohrleitung 1:

$$\dot{V} = c_{12} \cdot A_1 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow c_{12} = \frac{\dot{V}}{A_1} = \frac{0,25m^3/s}{\pi \cdot (0,5m)^2 / 4} = 1,27m/s \quad (1 P.)$$

Name:

Matrikelnummer:

Reynolds-Zahl in Rohrleitung 1:

$$\text{Re} = \frac{c_{12} \cdot D_1}{\nu} = \frac{1,27 \frac{m}{s} \cdot 0,5m}{10^{-6} m^2 / s} = 6,4 \cdot 10^5 \quad (8) \quad (0,5 \text{ P.})$$

Relative Rauigkeit:

$$k_s / D = \frac{1 \cdot 10^{-3} m}{0,5m} = 2 \cdot 10^{-3} \quad (9) \quad (0,5 \text{ P.})$$

Widerstandszahlen aus Moody-Diagramm:

$$\lambda \approx 0,024 \quad (10) \quad (0,5 \text{ P.})$$

Für den Druckverlust in Rohrleitung 2 folgt:

$$\Delta p_{Rohr2} = 0,024 \cdot 1000 kg / m^3 \cdot \frac{(1,27 m / s)^2}{2} \cdot \frac{60m}{0,5m} \approx 2323 Pa \quad (11) \quad (0,5P.)$$

Auflösen von Gl. (2) nach $P_{P,me}$ (mechanische Pumpenleistung):

$$P_{P,me} = \dot{V} \left[p_2 - p_1 + \frac{\rho}{2} (c_2^2 - c_1^2) + \rho \cdot g \cdot \Delta p \right] \quad (12)$$

Einsetzen von (1), (3), (4), (5), (7) und (11) in (12):

$$P_{P,me} = 0,25 \frac{m^3}{s} \left[\begin{array}{l} 10^5 Pa - 149050 Pa + \frac{1000 \frac{kg}{m^3}}{2} \left(\left(3,54 \frac{m}{s} \right)^2 - \left(5 \frac{m}{s} \right)^2 \right) + \\ 1000 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 25m + 2323 Pa \end{array} \right] \approx 48,1 kW \quad (13) \quad (0,5 \text{ P.})$$

Mit dem Pumpenwirkungsgrad folgt für die Wellenleistung:

$$\eta_P = \frac{P_{Pumpe}}{P_{Welle}} \Leftrightarrow P_{Welle} = \frac{P_{Pumpe}}{\eta_P} = \frac{48,1 kW}{0,7} = 68,7 kW \quad (14) \quad (1 \text{ P.})$$

b) (2 Punkte)

Name:

Matrikelnummer:

Hydrostatik:

$$p_u + \rho \cdot g \cdot h_1 + \rho \cdot \frac{c^2}{2} = p_u + \rho \cdot g \cdot h_2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{2[g \cdot (h_2 - h_1)]} = \sqrt{2 \left[9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (25m - 5m) \right]} = 19,81 \frac{m}{s} \quad (2 P.)$$

2.2) Entleerungsvorgang (9 Punkte)

Gesucht: Entleerungszeit des Schwimmbeckens

Bernoulli von 3->4:

$$p_3 + \rho \frac{c_3^2}{2} + \rho \cdot g \cdot (h_4 + z(t)) = p_4 + \rho \frac{c_4^2}{2} \quad (1)$$

(1P)

Mit

$$p_3 = p_u \quad (2)$$

(0,5P)

$$p_4 = p_u + \rho \cdot g \cdot h_p = 163765 Pa \quad (3)$$

(0,5 P.)

$$c_3 = 0 \quad (4)$$

(0,5P)

Folgt:

$$c_4(t) = \sqrt{\frac{2}{\rho} [p_u - p_4 + \rho \cdot g \cdot z(t)]} \quad (5)$$

(1 P.)

Massenbilanz:

Name:

Matrikelnummer:

$$dm = -\rho \cdot c_4(t) \cdot A_4 = \frac{b \cdot l \cdot dz \cdot \rho}{dt} \quad (6)$$

$$\Rightarrow dt = -\frac{b \cdot l}{A_4 \cdot c_4(t)} dz \quad (3 P.)$$

(4) in (5):

$$dt = -\frac{b \cdot l \cdot dz}{A_4 \sqrt{\frac{2}{\rho} [p_u - p_4 + \rho \cdot g \cdot z(t)]}} \quad (7)$$

(0,5P)

$$\int_0^{t_{leer}} dt = -\frac{b \cdot l}{A_4} \int_{z=h_3+h_4}^{z=h_4} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\rho} [p_u - p_4 + \rho \cdot g \cdot z(t)]}} dz \quad (8)$$

(0,5P)

$$\int_0^{t_{leer}} dt = -\frac{b \cdot l}{A_4 \sqrt{\frac{2}{\rho}}} \cdot \int_{z=h_3+h_4}^{z=h_4} [p_u - p_4 + \rho \cdot g \cdot z(t)]^{-1/2} dz \quad (9)$$

$$t_{leer} = -\frac{b \cdot l}{A_4 \sqrt{\frac{2}{\rho}}} \cdot \left[\frac{2}{\rho \cdot g} (p_u - p_4 + \rho \cdot g \cdot z)^{1/2} \right]_{h_3+h_4}^{h_4} \quad (10)$$

(1P)

Einsetzen von

$$A_4 = \frac{\pi \cdot D_4^2}{4} \quad (11)$$

und (3) in (9) folgt:

$$t_{leer} = 111,4s = 1,86Min. \quad (12)$$

(0,5 P.)

Name:

Matrikelnummer:

3.) Widerstandskräfte (12 Punkte)

3.1) (5 Punkte)

Druckdifferenz $p_1 - p_2$: Bernoulli 1- \rightarrow 2

$$p_1 + \rho \frac{c_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{c_2^2}{2} \quad (1)$$
$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} [c_2^2 - c_1^2] \quad (1 \text{ P.})$$
$$(0,5 \text{ P.})$$

Konti:

$$\dot{m} = \rho \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho \cdot c_2 \cdot A_2$$

mit $c_1 = c$,

$$A_1 = b_1^2 = 2,25 \text{ m}^2 \text{ und} \quad (2)$$
$$A_2 = b_1^2 - b_2^2 = 1,69 \text{ m}^2 \quad (1 \text{ P.})$$

fö lgt

$$\Rightarrow c_2 = c \frac{A_1}{A_2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{2,25 \text{ m}^2}{1,69 \text{ m}^2} = 4 \text{ m/s}$$

(2) in (1):

$$p_1 - p_2 = \frac{1000 \text{ kg/s}}{2} [(4 \text{ m/s})^2 - (3 \text{ m/s})^2] = 3500 \text{ Pa} \quad (3)$$
$$(0,5 \text{ P.})$$

Kräftebilanz in x-Richtung:

$$p_1 \cdot A_1 + \dot{m}c_1 - p_2 A_1 - \dot{m}c_2 - W = 0$$
$$\Rightarrow W = (p_1 - p_2)A_1 + \dot{m}(c_1 - c_2) \quad (4)$$
$$W = 3500 \text{ Pa} \cdot 2,25 \text{ m}^2 + 6750 \text{ kg/s} \cdot (3 \text{ m/s} - 4 \text{ m/s}) = 1125 \text{ N} \quad (2 \text{ P.})$$

3.2) (7 Punkte)

Berechnung des Umschlagpunktes:

$$\text{Re}_{krit} = \frac{c_2 x_u}{\nu} \Leftrightarrow x_u = \frac{\text{Re}_{krit} \cdot \nu}{c_2} \quad (1)$$

Name:

Matrikelnummer:

Konti:

$$\dot{m} = \rho \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho \cdot c_2 \cdot A_2$$

$$\text{mit } c_1 = c$$

$$A_1 = b_1^2 = 2,25m^2 \text{ und}$$

$$A_2 = b_1^2 - b_2^2 = 1,69m^2$$

folgt

$$\Rightarrow c_2 = c \frac{A_1}{A_2} = 3 \frac{m}{s} \cdot \frac{2,25m^2}{1,69m^2} = 4m/s$$

(2)

(1 P.)

(2) in (1)

$$x_u = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}}{4m/s} \approx 0,125m$$

(3)

(0,5 P.)

Berechnung des laminaren Widerstandsbeiwertes:

$$c_{w,laminar} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_{l,laminar}}}$$

(4)

(0,5P)

mit

$$Re_{l,laminar} = \frac{c_2 \cdot x_u}{\nu} = \frac{4m/s \cdot 0,125m}{10^{-6} \frac{m^2}{s}} \approx 5 \cdot 10^5$$

(5)

(0,5 P.)

Folgt aus (4)

$$c_{w,laminar} = \frac{1,328}{\sqrt{5 \cdot 10^5}} = 0,0019$$

(6)

(0,5 P.)

Für die Widerstandskraft durch die laminare Grenzschichtströmung folgt:

Name:

Matrikelnummer:

$$F_{w,laminar} = 4 \cdot c_{w,laminar} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \cdot b_1 \cdot x_u = 11,27 N \quad (7)$$

(1P.)

Berechnung des turbulenten Widerstandsbeiwertes:

$$c_{w,turbulent} = \frac{0,074}{\sqrt{Re_{l,turbulent}}} \quad (8)$$

(0,5P)

mit

$$Re_{l,turbulent} = \frac{c_2 \cdot (l - x_u)}{v} = \frac{4 m/s \cdot 1,875 m}{10^{-6} \frac{m^2}{s}} \approx 7,5 \cdot 10^6 \quad (9)$$

(0,5 P.)

Folgt aus (8)

$$c_{w,turbulent} = \frac{0,074}{\sqrt{7,5 \cdot 10^6}} = 0,00312 \quad (10)$$

(0,5 P.)

Für die Widerstandskraft durch die turbulente Grenzschichtströmung folgt:

$$F_{w,turbulent} = 4 \cdot c_{w,turbulent} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \cdot b_1 \cdot (l - x_u) = 280,8 N \quad (11)$$

(1 P.)

Für den Gesamtwiderstand folgt:

$$F_W = F_{w,laminar} + F_{w,turbulent} = 292,1 N \quad (12)$$

(0,5 P.)

Aufgabe 4.) Rotor (16 Punkte)

4.1) Berechnung der Benötigten Antriebleistung der Düse (8 Punkte)

Umrechnung von Winkelgeschwindigkeit auf Drehzahl:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} \cdot r \quad (3)$$

Berechnung der Widerstandskraft eines Tragflügels:

$$F_W = c_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot s_{\text{Flügel}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} \right)^2 \cdot \int_0^r r^2 dr = c_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot s_{\text{Flügel}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} \right)^2 \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^r \quad (1)$$

$$= 0,08 \cdot \frac{1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2} \cdot 0,1 \text{m} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 5000 \frac{1}{\text{s}}}{60} \right)^2 \cdot \frac{0,5^3 \text{m}^3}{3} = 54,8311 \text{N} \quad (2 \text{ P.})$$

Berechnung des Widerstandsmoments des Rotors:

$$M_W = 2 \cdot \frac{r}{2} \cdot F_W = 2 \cdot \frac{0,5 \text{m}}{2} \cdot 109,6623 \text{N} = 27,4156 \text{Nm} \quad (2)$$

Krit. Druckverhältnis prüfen

Berechnung von c^* :

$$c^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot R \cdot T_0} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4}{1,4 + 1} \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 293 \text{K}} = 313,219 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (4)$$

(0,5 P.)

Berechnung von T^* :

$$T^* = \frac{T_0}{\frac{\kappa + 1}{2}} = \frac{293 \text{K}}{1,4 + 1} = 244,1667 \text{K} \quad (5)$$

(0,5 P.)

Berechnung von P^* :

$$P^* = \frac{P_0}{\left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} = \frac{300000 \text{Pa}}{\left(\frac{1,4 + 1}{2} \right)^{\frac{1,4}{1,4 - 1}}} = 158484 \text{Pa} \quad (6)$$

(0,5 P.)

Berechnung von ρ^* :

$$\rho^* = \frac{P^*}{R \cdot T^*} = \frac{158484 \text{Pa}}{287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 244 \text{K}} = 2,262 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (7)$$

(0,5 P.)

\dot{m} :

$$\dot{m}^* = \rho^* \cdot A_{\text{min}} \cdot c^* \quad (8)$$

F_{Impuls}

Name:

Matrikelnummer:

$$F_{\text{Impuls}} = c^* \cdot \dot{m}^* \quad (3)$$

Berechnung von M_{Impuls} . Konti muss im Relativsystem angewendet werden:

$$M_{\text{Impuls}} = 2 \cdot r \cdot F_{\text{Impuls}} = 2 \cdot r \cdot c^{*2} \cdot A_{\text{Min}} \quad (3)$$

(0,5P)

Momentengleichgewicht um den Rotormittelpunkt:

$$M_{\text{Impuls}} = M_W + M_R \quad (10)$$

Auflösen von (3) nach A_{min} :

$$A_{\text{min}} = \frac{M_W + M_R}{2 \cdot r \cdot c^* \cdot \rho^* \cdot c^*} = \frac{27,4156 \text{ Nm} + 10 \text{ Nm}}{2 \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 313,219^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 2,262 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0,00017 \text{ m}^2 \quad (11)$$

(1,5 P.)

Berechnung von \dot{m} :

$$\dot{m} = A_{\text{min}} \cdot c^* \cdot \rho^* = 0,0029 \text{ m}^2 \cdot 313,219 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,262 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0,1195 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad (11)$$

(1 P.)

4.2) Berechnung der Benötigten Antriebleistung Düse (8 Punkte)

Berechnung der Dichte im Druckbehälter:

$$\rho_0 = \frac{P_0}{R \cdot T_0} = \frac{200000 \text{ Pa}}{287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 293 \text{ K}} = 2,378 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (1)$$

(0,5 P.)

Berechnung der Dichte im engsten Querschnitt:

$$\rho^* = \frac{\rho_0}{\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} = \frac{2,378 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{\left(\frac{1,4+1}{2}\right)^{\frac{1}{1,4-1}}} = 1,507 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (2)$$

(0,5 P.)

Berechnung der Geschwindigkeit im engsten Querschnitt:

$$c^* = a = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa+1} \cdot R \cdot T_0} = 313,219 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (3)$$

(0,5 P.)

Berechnung des Massenstroms durch die Lavaldüse:

$$\dot{m} = A^* \cdot c^* \cdot \rho^* = 0,002 \text{ m}^2 \cdot 313,219 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,507 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0,944 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad (4)$$

(1 P.)

Name:

Matrikelnummer:

Berechnung der Austrittsgeschwindigkeit:

$$\frac{p_u}{p_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2 \cdot \kappa} \cdot \frac{\rho_0}{p_0} (c_u^2 - c_0^2) \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$
$$\Rightarrow c_u = \sqrt{\left(1 - \frac{\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_u}{p_0}}{\sqrt{\frac{p_u}{p_0}}} \right) \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1}} = \sqrt{\left(1 - \frac{1,4}{1,4 - 1} \sqrt{\frac{100000 Pa}{200000 Pa}} \right) \cdot \frac{200000 Pa}{2,378 \frac{kg}{m^3}} \cdot \frac{2 \cdot 1,4}{1,4 - 1}} \quad (5)$$
$$= 325,532 \frac{m}{s} \quad (1 P.)$$

Berechnung der Dichte im Austritt:

$$\rho_2 = \rho_0 \cdot \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2 \cdot \kappa} \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot c_u^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$
$$= 2,378 \frac{kg}{m^3} \cdot \left(1 - \frac{1,4 - 1}{2 \cdot 1,4} \cdot \frac{2,378 \frac{kg}{m^3}}{200000 Pa} * \left(325,532 \frac{m}{s} \right)^2 \right)^{\frac{1}{1,4 - 1}} = 1,448 \frac{kg}{m^3} \quad (6)$$
$$(1 P.)$$

Konti:

$$\dot{m}^* = \dot{m}_2 \quad (7)$$
$$(0,5P)$$

Berechnung des Austrittsquerschnitts mit:

$$\dot{m}^* = A_2 \cdot c_2 \cdot \rho_2 \quad (8)$$
$$\Rightarrow d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot \dot{m}}{\pi \cdot c_2 \cdot \rho_2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,944 \frac{kg}{s}}{\pi \cdot 325,532 \frac{m}{s} \cdot 1,448 \frac{kg}{m^3}}} = 0,05m \quad (1 P.)$$

Kräftebilanz der Lavaldüse:

$$\sum F = 0 = F - \dot{m} \cdot c_2 \quad (9)$$
$$F = \dot{m} \cdot c_2 = 0,944 \frac{kg}{s} \cdot 325,532 \frac{m}{s} = 307,302N \quad (1,5 P.)$$