

Klausur Strömungsmechanik 1

Herbst 2010

18. August 2010, Beginn 15:30 Uhr

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- TFD-Formelsammlung (ohne handschriftliche Ergänzungen)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht, => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Aufgabe	Punkte
1. Kurzaufgaben	15
2. Kompressible Strömungen	22
3. Inkompressible Strömungen	23
Gesamt	60

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

*Prof. J. Seume
C. Liethmeyer, S. Hohenstein*

!!Alle Aufgabenteile (X.X) sind unabhängig voneinander lösbar!!

1. Kurzaufgaben (15 Punkte)

Hinweis: Die Ergebnisse mit Einheit der Kurzaufgaben sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen. Es gibt bei Kurzaufgaben keine Punkte auf den Rechenweg. Lösungen auf Zetteln werden nicht bewertet!

1.1. Multiple-Choice (4 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.
(nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet)

Nebeltröpfchen:

- Der Druck innerhalb eines Nebeltröpfchens ist gleich dem Umgebungsdruck.
- Ein Nebeltröpfchen bleibt aufgrund seiner Oberflächenspannung bestehen.
- Die Resultierende der Kräfte, die auf ein Molekül an der Phasengrenze wirken, ist nach innen gerichtet.
- Durch eine Reduktion des Umgebungsdruckes wird das Nebeltröpfchen größer.

Was kann mit einem Prandtl'schen Staurohr in inkompressiblen Strömungen gemessen werden:

- Statische Temperatur eines Fluids
- Gesamtdruck eines Fluids
- Dynamischer Druck eines Fluids
- Die Dichte eines Fluids

Was folgt aus der gegebenen Bewegungsgleichung für eine voll ausgebildete, laminare Rohrströmung:

Bewegungsgleichung:

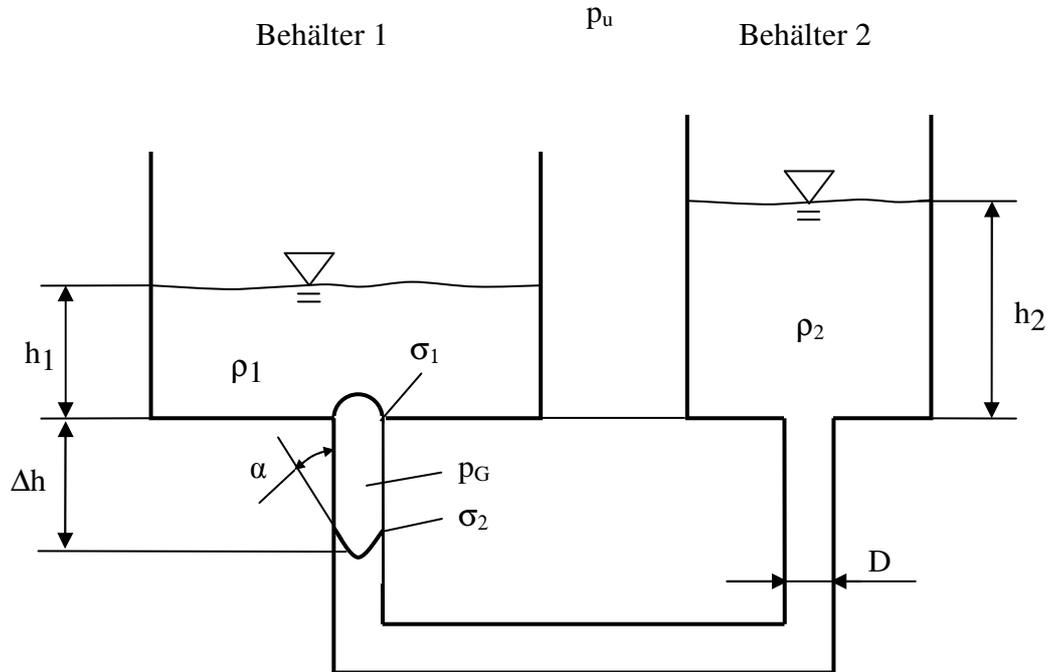
$$-\frac{dp}{dx} = \frac{2\tau}{r} = -\frac{2\eta}{r} \frac{dc}{dr}$$

- Der Druckgradient ist konstant
- Die Schubspannung τ ist konstant über den Rohrradius
- Das Geschwindigkeitsprofil ist parabolisch
- Die Änderung im Geschwindigkeitsprofil in x-Richtung ist proportional zum Druckgradienten

Wie verhalten sich folgende Größen eines strömenden Fluids in Strömungsrichtung, wenn ein senkrechter Verdichtungsstoß auftritt:

- Die Dichte des Fluids nimmt ab.
- Die Entropie nimmt zu.
- Der statische Druck nimmt zu.
- Die Totaltemperatur nimmt ab.

1.2. Oberflächenspannung (6 Punkte)



Gegeben ist ein einfacher Versuchsaufbau zum Messen der Oberflächenspannung. In Behälter 1 befindet sich die Flüssigkeit mit der Dichte ρ_1 und dem Füllstand h_1 . Die Flüssigkeit in Behälter 2 mit dem Füllstand h_2 hat die Dichte ρ_2 . Beide Behälter sind über ein dünnes Rohr miteinander verbunden, in dem ein Versuchsgas eingeschlossen ist. Der Flüssigkeitsfüllstand h_2 in Behälter 2 wird so lange erhöht, bis sich am Austritt des Röhrchens in Behälter 1 eine Halbkugel ausbildet.

Hinweis: Der Schwerkräfteinfluss auf das Versuchsgas kann vernachlässigt werden.

Berechnen Sie

- a) den sich einstellenden Druck p_G des eingeschlossenen Gases innerhalb des Röhrchens und
- b) die Oberflächenspannung σ_1 .

Die Lösungen mit Einheit sind in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen (siehe Hinweis oben)!!!

Gegeben:

$h_1 = 20 \text{ cm}$

$h_2 = 30 \text{ cm}$

$\Delta h = 5 \text{ cm}$

$D = 5 \text{ mm}$

$\rho_1 = 1300 \text{ kg/m}^3$

$\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$

$\sigma_2 = 0,08 \text{ N/m}$

$p_u = 10^5 \text{ Pa}$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$\alpha = 30^\circ$

a)

$p_G =$	[]
---------	----------

b)

$\sigma_1 =$	[]
--------------	----------

1.3. Laval-Düse (5 Punkte)

Gegeben ist die in Abbildung 1 dargestellte Laval-Düse. Geben Sie die Abhängigkeit des Flächenverhältnisses $A(x)/A^*$ von der lokalen Mach-Zahl $Ma(x)$ an. Es gelten folgende Beziehungen:

Gegeben:

$$\frac{c^*}{c(x)} = 4 \frac{\sqrt{\kappa-1} \cdot \sqrt{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma(x)^2}}{\sqrt{\kappa^2 - 1} \cdot Ma(x)}$$

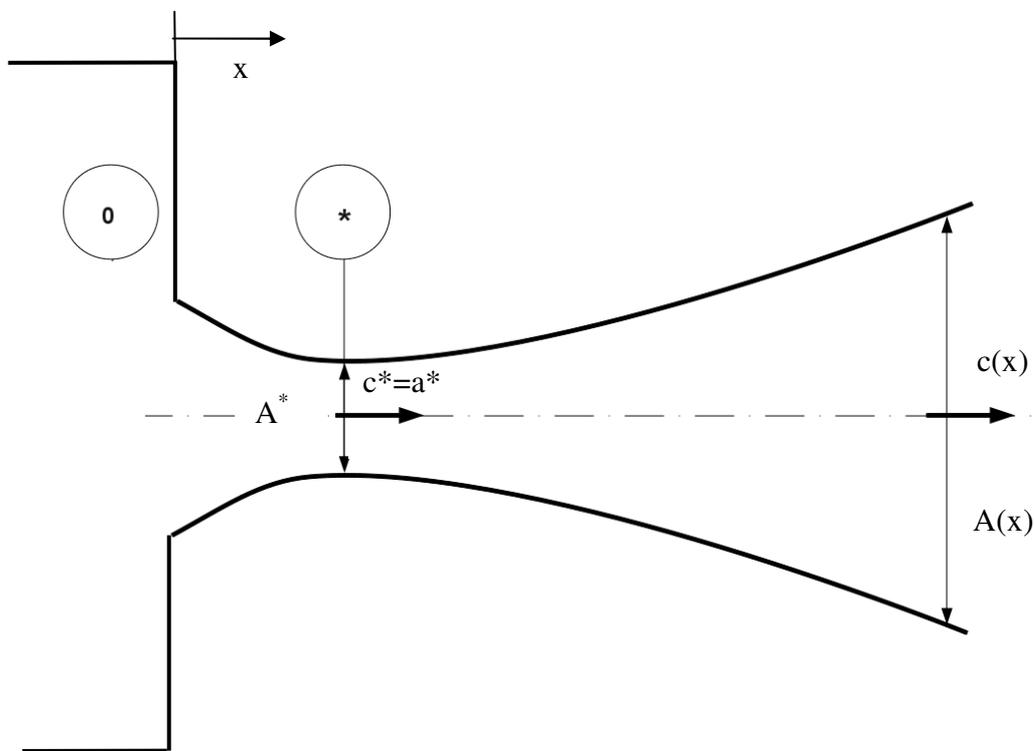


Abbildung 1

$\frac{A(x)}{A^*} =$	$[\quad]$
----------------------	-------------

2. Wasserstandregelung (22 Punkte)

In einem Museum soll den Gästen die Technik der antiken Griechen anhand von Modellen gezeigt werden. Ein Modell besteht aus einem Wasserspeicher, einem Abflussrohr, aus dem Wasser in ein Auffangbecken fließen kann, sowie einem Zulauf mit einer Pumpe mit dem Wirkungsgrad η_p (siehe Abbildung 2).

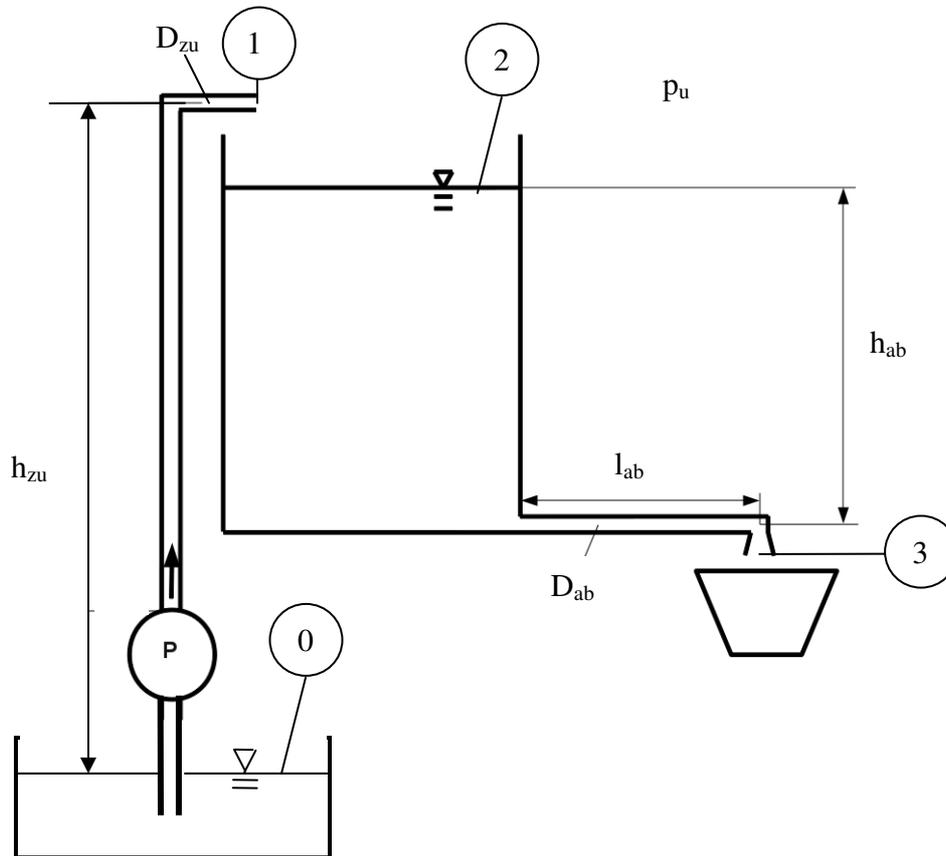


Abbildung 2

Annahmen:

Strömungsverluste durch die Umlenkungen in Zu- und Ablauf sowie der Querschnittserweiterung am Ende des Abflusses können vernachlässigt werden. Die Druckverluste im Zulauf können ebenfalls vernachlässigt werden. Die Füllhöhe h_{ab} des Speicherbeckens kann für alle Aufgabenteile als konstant angenommen werden.

Anmerkung:

Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Gegeben für alle Aufgabenteile:

Geometrische Größen:

$$h_{zu} = 3 \text{ m}; \quad h_{ab} = 1,5 \text{ m}; \quad l_{ab} = 0,7 \text{ m}; \quad D_{zu} = D_{ab} = 20 \text{ mm};$$

Stoffwerte:

$$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3; \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Weitere:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2; \quad p_u = 10^5 \text{ Pa}; \quad \eta_p = 0,85;$$

2.1. (6 Punkte)

Die Wasserstandshöhe h_{ab} im Speicherbecken soll konstant gehalten werden. Berechnen Sie die zugeführte elektrische Leistung P_{el} der Pumpe in der Zuströmleitung mit dem Durchmesser D_{zu} und der Höhe h_{zu} , wenn das Wasser verlustfrei durch das Abflussrohr ausströmt.

2.2. (7 Punkte)

Im Abflussrohr mit dem Durchmesser D_{ab} und der Länge l_{ab} ergeben sich aufgrund von Verschmutzung Druckverluste.

- Wie groß ist die zugeführte elektrische Leistung P_{el} der Pumpe, wenn die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wassers im Abflussrohr $c_{ab} = 3,5 \text{ m/s}$ beträgt.
- Ist die Strömung im Abflussrohr laminar oder turbulent?
- Wie groß sind die Druckverluste im Abflussrohr, wenn die Sandkornhöhe $k_s = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ beträgt?

Gegeben für Aufgabenteil 2.2:

$$c_{ab} = 3,5 \text{ m/s} \quad k_s = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

2.3. (9 Punkte)

Die Wasserstandsregelung von Ktesibies besteht aus einem schwimmenden Stopfen im Auffangbecken. Mit steigendem Füllstand im Auffangbecken steigt der Stopfen, verschließt zunehmend den Ausfluss aus dem Speicherbecken und reduziert so den austretenden Massenstrom (siehe Abbildung 3). Es kann davon ausgegangen werden, dass das Wasser senkrecht aus dem Ausfluss ausfließt und vollständig auf die Oberseite des Stopfens trifft.

- a) Kann es einen Stopfen geben, der zur Hälfte eingetaucht ist und sich dabei ein Ausflussmassenstrom von $\dot{m}=0,732 \text{ kg/s}$ einstellt?
- b) Der Stopfen gemäß Abbildung 3 besteht aus Holz mit der Dichte $\rho_{\text{Stopfen}} = 400 \text{ kg/m}^3$. Wie groß ist der Massenstrom im Abflussrohr, wenn der Stopfen wie gewünscht zur Hälfte eingetaucht ist?

Gegeben für Aufgabenteil 2.3:

$D_{\text{Stopfen}} = D_{\text{ab}} = 20 \text{ mm}$; $l_{\text{Stopfen}} = 0,2 \text{ m}$;

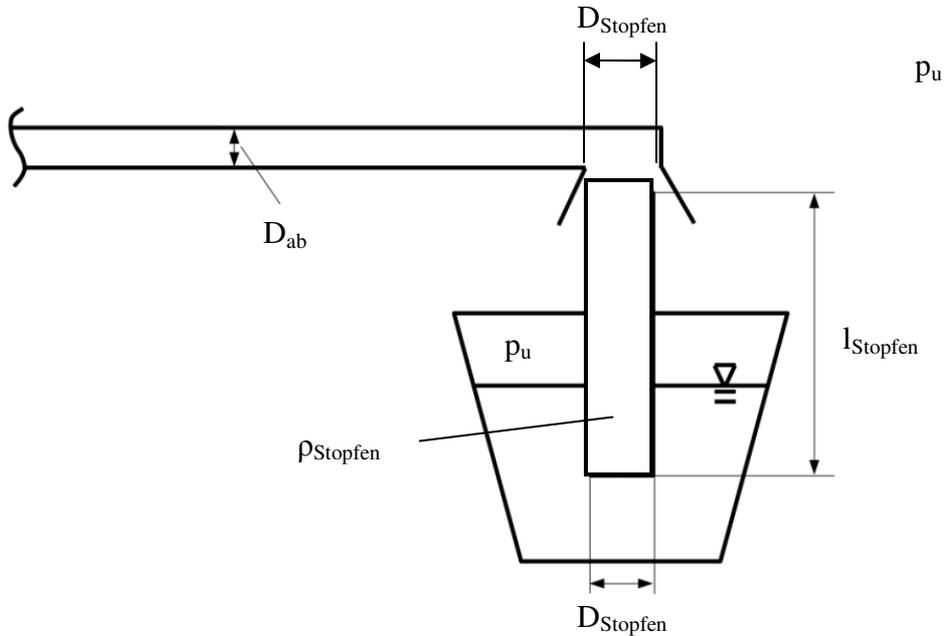


Abbildung 3

3. Überschall-Windkanal (23 Punkte)

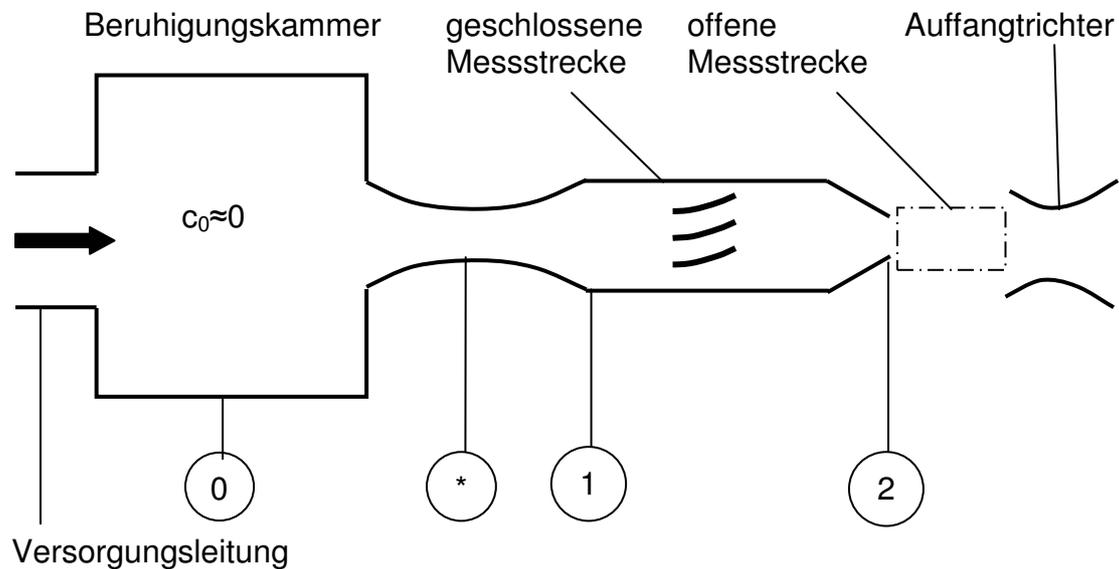


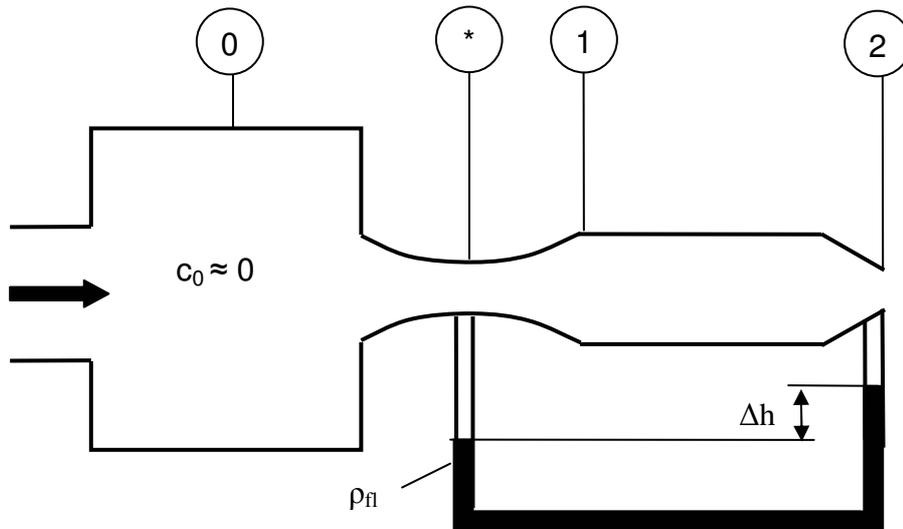
Abbildung 4

Gegeben ist ein Überschallwindkanal gemäß Abbildung 4, der über eine Versorgungsleitung gespeist wird. Die Strömung wird anschließend in einer Beruhigungskammer homogenisiert, deren Volumen so groß ist, dass die Strömungsgeschwindigkeit innerhalb der Kammer vernachlässigt werden kann ($c_0 \approx 0$). Über eine Laval-Düse kann die Strömung auf Überschall beschleunigt werden, so dass optional in einer geschlossenen Messstrecke oder einer offenen Messstrecke die Aerodynamik unterschiedlicher Körper untersucht werden kann. Über einen an die offene Messstrecke anschließenden Auffangtrichter wird das Fluid aufgefangen.

Folgende Annahmen werden für alle Aufgabenteile getroffen:

- Ideales Gas
- Isentrope (reibungsfreie, adiabate) Strömung
- Stationäre Strömung
- Kompressibles Fluid
- Stöße können vernachlässigt werden
- Für die Aufgabenteile 3.1 und 3.2 wird die Laval-Düse im Auslegungszustand betrieben, so dass im engsten Querschnitt der Laval-Düse $Ma^*=1$ gilt.

3.1. (11 Punkte)



Über ein U-Rohr Manometer wird der statische Differenzdruck zwischen dem engsten Querschnitt der Laval-Düse (Zustand *) und dem Austrittsquerschnitt der Austrittsdüse (Zustand 2) gemessen. Für einen Druck in der Beruhigungskammer von $p_0 = 2 \cdot 10^5$ Pa stellt sich im Austrittsquerschnitt der Düse eine Geschwindigkeit von $c_2 = 500$ m/s und im U-Rohr eine Höhendifferenz $\Delta h = 0,3$ m ein. Die Dichte der Messflüssigkeit im U-Rohr ist ρ_{fl} . Berechnen Sie das Querschnittsverhältnis A^*/A_2 .

Gegebene Größen:

Index 0: $p_0 = 2 \cdot 10^5$ Pa

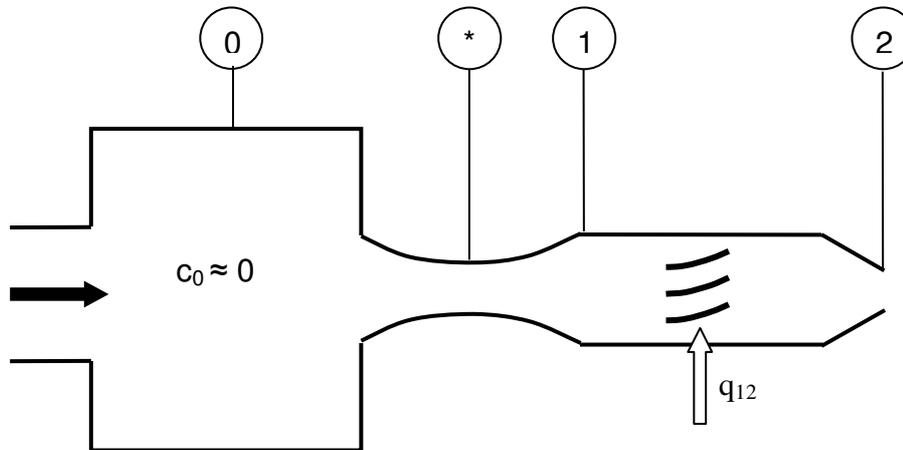
Index *: $Ma^* = 1$

Index 1: -

Index 2: $c_2 = 500$ m/s

Sonstige Größen: $\Delta h = 0,3$ m $g = 9,81$ m/s² $\kappa = 1,4$ $R = 287$ J/(kg·K)
 $\rho_{fl} = 13500$ kg/m³

3.2. (6 Punkte)



In der geschlossenen Messstrecke wird das Abkühlungsverhalten eines Schaufelgitters untersucht, das zu diesem Zweck beheizt wird. Wie groß ist der über das Schaufelgitter zugeführte spezifische Wärmestrom q_{12} , wenn sich im Experiment für die unten gegebenen Größen zwischen den Querschnitten 1 und 2 eine Temperaturdifferenz von $\Delta T_{12} = (T_2 - T_1) = -5 \text{ K}$ einstellt?

Hinweis: $h = u + \frac{p}{\rho}$; $h = c_p \cdot T$; $R = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot c_p$ (Formelsammlung S.2)

Gegebene Größen:

Index 0: $T_0 = 500 \text{ K}$

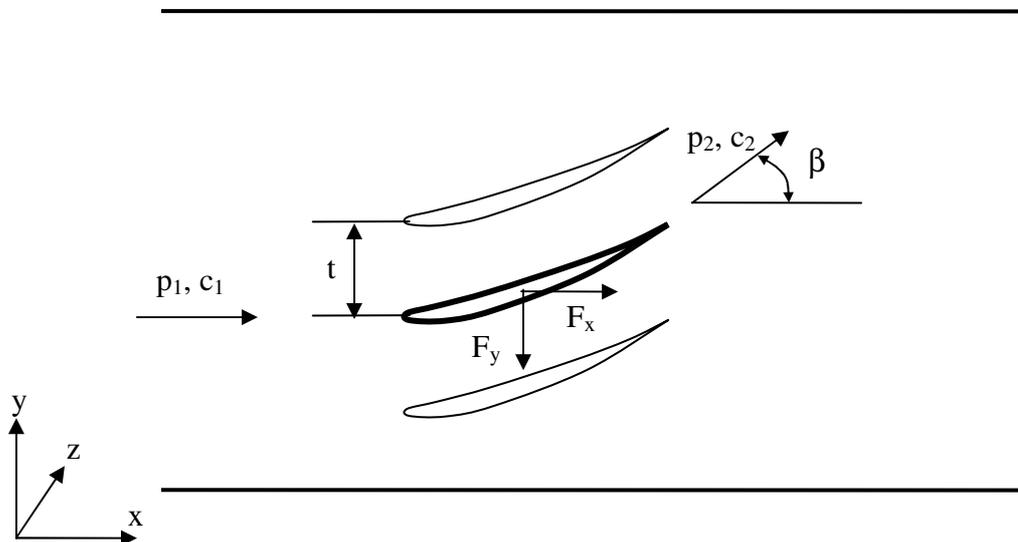
Index *: $Ma^* = 1$

Index 1: $Ma_1 = 1,6$

Index 2: $c_2 = 600 \text{ m/s}$

Sonstige Größen: $\Delta T_{12} = -5 \text{ K}$ $\kappa = 1,4$ $R = 287 \text{ J/(kg K)}$

3.3. (6 Punkte)



In der geschlossenen Messstrecke wird ein Verdichtergitter bestehend aus mehreren Schaufelreihen untersucht. Der Windkanal ist so eingestellt, dass zwischen den Schaufelreihen die gleichen Strömungsverhältnisse herrschen (ähnlich zu einem unendlichen Schaufelgitter). Vor der mittleren Schaufelreihe des dargestellten Schaufelgitters wird der mittlere statische Druck p_1 und die mittlere Strömungsgeschwindigkeit c_1 gemessen. Der mittlere Abströmwinkel beträgt $\beta = 8^\circ$. An der mittleren Schaufelreihe greift in horizontaler Richtung die Kraft $F_x = 20 \text{ N}$, in vertikaler Richtung die Kraft $F_y = 150 \text{ N}$ an. Der Schaufelabstand ist t , die Schaufellänge in z -Richtung ist l . Der über der mittleren Schaufelreihe durchgesetzte Massenstrom beträgt $\dot{m}_{\text{Schaufel}} = 9 \text{ kg/s}$. Berechnen Sie die mittlere Abströmgeschwindigkeit c_2 und den mittleren statischen Druck p_2 hinter der mittleren Schaufelreihe,

Gegebene Größen:

- Index 0:** -
Index 1: $c_1 = 150 \text{ m/s}$ $p_1 = 98000 \text{ Pa}$
Index 2: -
Sonstige Größen: $l = 0.5 \text{ m}$ $t = 0,1 \text{ m}$ $\dot{m}_{\text{Schaufel}} = 9 \text{ kg/s}$ $\beta = 8^\circ$
 $F_x = 20 \text{ N}$ $F_y = 150 \text{ N}$

Musterlösung zur Klausur

Strömungsmechanik 1

Herbst 2010

18. August 2010

Aufgabe 1.1.) Multiple-Choice (4 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.
(nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet)

Nebeltröpfchen:

- Der Druck innerhalb eines Nebeltröpfchens ist gleich dem Umgebungsdruck.
- Ein Nebeltröpfchen bleibt aufgrund seiner Oberflächenspannung bestehen.
- Die Resultierende der Kräfte, die auf ein Molekül an der Phasengrenze wirken, ist nach innen gerichtet.
- Durch eine Reduktion des Umgebungsdruckes wird das Nebeltröpfchen größer.

Was kann mit einem Prandtl'schen Staurohr in inkompressiblen Strömungen gemessen werden:

- Statische Temperatur eines Fluids
- Gesamtdruck eines Fluids
- Dynamischer Druck eines Fluids
- Die Dichte eines Fluids

Was folgt aus der gegebenen Bewegungsgleichung für eine voll ausgebildete, laminare Rohrströmung:

Bewegungsgleichung:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{2\tau}{r} = -\frac{2\eta}{r} \frac{dc}{dr}$$

- Der Druckgradient ist konstant
- Die Schubspannung τ ist konstant über den Rohrradius
- Das Geschwindigkeitsprofil ist parabolisch
- Die Änderung im Geschwindigkeitsprofil in x-Richtung ist proportional zum Druckgradienten

Wie verhalten sich folgende Größen eines strömenden Fluids in Strömungsrichtung, wenn ein senkrechter Verdichtungsstoß auftritt:

- Die Dichte des Fluids nimmt ab.
- Die Entropie nimmt zu.
- Der statische Druck nimmt zu.
- Die Totaltemperatur nimmt ab.

Aufgabe 1.2.) Oberflächenspannung (6 Punkte)

a) (4 Punkte)

Gesucht: Gasdruck p_G :

KGG1:

$$\begin{aligned}
 \sum F = 0 &= F_{H_{20,2}} + F_{\sigma_2} - F_{p_G} \\
 \Rightarrow 0 &= (\rho g (h_2 + \Delta h) + p_u) \cdot A + \sigma_2 \cdot \pi \cdot D - p_G \cdot A \\
 \Rightarrow p_G &= 103489 \text{ Pa}
 \end{aligned} \tag{1}$$

b) (2 Punkte)

Gesucht: Gasdruck p_G :

KGG2:

$$\begin{aligned}
 \sum F = 0 &= F_{p_G} - F_{\sigma_1} - F_{H_{20,1}} \\
 \Rightarrow 0 &= p_G \cdot A - \sigma_1 \cdot \pi \cdot D - (\rho_1 g h_1 + p_u) \cdot A \\
 \Rightarrow \sigma_1 &= 1,173 \frac{N}{m}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe 1.3 Laval-Düse (5 Punkte)

ACHTUNG: Fehler in der Aufgabenstellung. Die „4“ vor dem Bruch ist falsch und muss gestrichen werden.

Das Flächenverhältnis ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\rho^* \cdot c^* \cdot A^* = \rho \cdot c(x) \cdot A(x)$$

Einsetzen der kritischen Größen und umstellen nach $A(x)/A^*$:

$$\frac{A(x)}{A^*} = \frac{\rho^* \cdot c^*}{\rho \cdot c(x)} = \frac{\rho^* \rho_0}{\rho_0 \rho} \frac{c^*}{c(x)}$$

Aus der Formelsammlung ergeben sich für die Dichteverhältnisse:

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\kappa - 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

Mit dem Geschwindigkeitsverhältnis aus der Aufgabenstellung ohne die „4“ vor dem Bruch sowie den Dichteverhältnissen folgt für das Flächenverhältnis:

$$\frac{A(x)}{A^*} = \left[\frac{2 + (\kappa - 1)Ma(x)^2}{\kappa + 1} \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} \cdot \frac{1}{Ma(x)}$$

Lösung mit dem falschen Geschwindigkeitsverhältnis:

$$\frac{A(x)}{A^*} = \left[\frac{2 + (\kappa - 1)Ma(x)^2}{\kappa + 1} \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} \cdot \frac{4}{Ma(x)}$$

Mit dem Geschwindigkeitsverhältnis aus der Aufgabenstellung ohne die „4“ vor dem Bruch sowie den Dichteverhältnissen folgt für das Flächenverhältnis:

$$\frac{A(x)}{A^*} = \left[\frac{2 + (\kappa - 1)Ma(x)^2}{\kappa + 1} \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} \cdot \frac{1}{Ma(x)}$$

Aufgabe 2. Wasserstandregelung (22 Punkte)

Aufgabe 2.1 (6 Punkte)

Abfließender Massenstrom = zufließender Massenstrom:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_3$$

Geschwindigkeit aus Abflussformel nach Torricelli:

$$c_3 = \sqrt{2h_{ab}g} = 5,425 \frac{m}{s}$$

Daraus folgt für den Massenstrom:

$$\dot{m}_1 = \rho_w c_3 \frac{\pi}{4} D_{ab}^2 = 1.704 \frac{kg}{s}$$

Bernoulli-Gleichung für 0 nach 1:

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_w} + gz_0 + \frac{P_{01}}{\rho_w \dot{V}} = \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_w} + gz_1 + \frac{\Delta p_{v01}}{\rho_w}$$

Mit $z_0=0m$, $c_0=0m/s$, $p_0=p_1=p_u$ und $z_1=h_{zu}$ folgt sowie $c_1=c_3$ folgt:

$$\frac{P_{01}}{\rho_w \dot{V}} = \frac{c_1^2}{2} + gh_{zu}$$

$$P_{01} = \dot{m}_1 \left(\frac{c_3^2}{2} + gh_{zu} \right) = 75,22W$$

$$P_{el} = \frac{P_{01}}{\eta_p} = 88,5W$$

Aufgabe 2.2 (7 Punkte)

a)

Massenstrom für neue Ausflussgeschwindigkeit bestimmen:

$$\dot{m}_3 = \rho_w c_3 \pi / 4 D_{ab}^2 = 1,099 \frac{kg}{s}$$

Bernoulli-Gleichung wie in 2.1 aufstellen:

$$\frac{c_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_w} + gz_0 + \frac{P_{01}}{\rho_w \dot{V}} = \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_w} + gz_1 + \frac{\Delta p_{v01}}{\rho_w}$$

$$\frac{P_{01}}{\rho_w \dot{V}} = \frac{c_1^2}{2} + gh_{zu}$$

$$P_{01} = \dot{m}_1 \left(\frac{c_3^2}{2} + gh_{zu} \right) = 39,09W$$

$$P_{el} = \frac{P_{01}}{\eta_p} = 45,99W$$

b)

Reynolds-Zahl im Rohr berechnen:

$$Re = \frac{c_3 D_{ab}}{\nu} = 70000$$

$$Re > Re_{krit} = 2300$$

Die Strömung im Rohr ist vollturbulent.

c)

Druckverluste im Rohr:

$$\Delta p_v = \lambda \frac{l_{ab}}{D_{ab}} \frac{\rho_w}{2} c_3^2$$

Aus dem Moody-Diagramm folgt für $Re=70000$ eine Rohrreibungszahl von $\lambda=0,02$. Damit ergibt sich für den Druckverlust:

$$\Delta p_v = 4287,5Pa$$

Aufgabe 2.3 (9 Punkte)

a) (6 Punkte)

Impulssatz um den Stopfen herum aufstellen:

$$\dot{m}_3 c_3 + F_G = A(p_w - p_u)$$

F_G = Gewichtskraft des Stopfens, p_w = Druck des Wassers auf Stopfenfläche von unten.

Für Druck ergibt sich:

$$p_w = p_u + g \cdot \rho_w \cdot l/2$$

Für die Gewichtskraft des Stopfens ergibt sich:

$$F_G = \rho_{\text{Stopfen}} \cdot A \cdot l \cdot g$$

Wasserdruck und Gewichtskraft in Impulssatz einsetzen und nach ρ_{Stopfen} auflösen führt zu folgender Gleichung:

$$\rho_{\text{Stopfen}} = \frac{A \cdot \rho_w \cdot g \cdot l/2 - \dot{m}_3 c_3}{A \cdot l \cdot g} = -3656,5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Der Stopfen hat eine negative Dichte und somit kann es solch einen Stopfen nicht geben.

b) (3 Punkte)

Die Austrittsgeschwindigkeit ergibt sich aus dem Impuls:

$$c_3 \dot{m}_3 = \rho_w \cdot c_3^2 \cdot A$$

Auflösen des Impulssatzes aus Aufgabenteil a) nach c_3 ergibt:

$$c_3 = \sqrt{\frac{\rho_w \cdot l/2 \cdot g - \rho_{\text{Stopfen}} \cdot l \cdot g}{\rho_w}} = 0,443 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{m}_3 = \rho_w c_3 A = 0,139 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Aufgabe 3. Überschall-Windkanal (23 Punkte)

3.1. (11 Punkte)

Gesucht Querschnittsverhältnis A^*/A_2

Konti

$$\begin{aligned}\rho^* c^* A^* &= \rho_2 c_2 A_2 \\ \Rightarrow \frac{A^*}{A_2} &= \frac{\rho_2 c_2}{\rho^* c^*}\end{aligned}\quad (1)$$

Drücke in * und 2:

In * gilt:

$$\begin{aligned}\frac{p_0}{p^*} &= \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \\ \Rightarrow p^* &= 105656 \text{ Pa}\end{aligned}\quad (2)$$

KGG im U-Rohr:

$$\begin{aligned}p^* &= p_2 + \rho g \Delta h \\ \Rightarrow p_2 &= p^* - \rho g \Delta h = 65926 \text{ Pa}\end{aligned}\quad (3)$$

Berechnen von Ma_2 :

$$\begin{aligned}\frac{p_0}{p_2} &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_2^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \\ \Rightarrow Ma_2 &= 1,366\end{aligned}\quad (4)$$

Berechnen von T_2 :

$$\begin{aligned}Ma_2 &= \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_2}{\sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_2}} \\ \Rightarrow T_2 &= 333,5 \text{ K}\end{aligned}\quad (5)$$

Berechnen von T_0 :

$$\frac{T_0}{T_2} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_2^2 \quad (6)$$
$$\Rightarrow T_0 = 458 \text{ K}$$

Berechnen von T^* :

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (8)$$
$$\Rightarrow T^* = 381,67$$

Berechnen von ρ_2 :

$$\frac{p_2}{\rho_2} = RT_2 \quad (9)$$
$$\Rightarrow \rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = 0,6887 \text{ kg / m}^3$$

Berechnen von ρ^* :

$$\frac{p^*}{\rho^*} = RT^* \quad (10)$$
$$\Rightarrow \rho^* = \frac{p^*}{RT^*} = 0,9647 \text{ kg / m}^3$$

Berechnen von c^* :

$$Ma^* = 1 = \frac{c^*}{a^*} = \frac{c^*}{\sqrt{\kappa \cdot R \cdot T^*}} \quad (11)$$
$$\Rightarrow c^* = 391,6 \text{ m / s}$$

Somit:

$$\Rightarrow \frac{A^*}{A_2} = 0,9117 \quad (12)$$

3.2. (6 Punkte)

Gesucht q_{12} :

Energiebilanzgl.:

$$\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = q_{12} \quad (1)$$

Mit

$$h = u + \frac{p}{\rho} \Rightarrow u = h - \frac{p}{\rho} = c_p T - \frac{p}{\rho} \quad (2)$$

Folgt aus (1):

$$c_p T_{12} + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) = q_{12} \quad (3)$$

Berechnen von c_1 :

$$\begin{aligned} Ma_1 &= \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_1}{\sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1}} \\ \Rightarrow c_1 &= Ma_1 \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1} \end{aligned} \quad (4)$$

Mit T_1

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{T_1} &= 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 \\ \Rightarrow T_1 &= \frac{T_0}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2} = 330,7 \text{ K} \end{aligned} \quad (5)$$

Folgt:

$$c_1 = 583,2 \text{ m/s} \quad (6)$$

Berechnung von c_p :

$$R = \frac{\kappa - 1}{\kappa} c_p \Rightarrow c_p = 1005 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \quad (7)$$

Aus (1) folgt::

$$q_{12} = 4903 \text{ J / kg} \quad (8)$$

3.3. (6 Punkte)

Berechnung von c_2 :

KKG in y-Richtung

$$\begin{aligned} \sum F = 0 &= -F_y + \dot{m} c_{2,y} \\ \Rightarrow c_{2,y} &= 16,67 \text{ m / s} \end{aligned} \quad (1)$$

Für c_2 folgt:

$$\sin \beta = \frac{c_{2,y}}{c_2} \Rightarrow c_2 = 119,8 \text{ m / s} \quad (2)$$

Berechnung von p_2 :

KKG in x-Richtung

$$\begin{aligned} \sum F = 0 &= p_1 A_1 + \dot{m} c_1 - p_2 A_2 - \dot{m} c_{2,x} + F_x \\ \Rightarrow p_2 &= 104054 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (3)$$