Leibniz Universität Hannover

Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik

Klausur

Strömungsmechanik 1

Herbst 2014

19. August 2014

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht, ⇒ keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- Mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

Weitere Hinweise:
Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.
Für Ergebnisse in Symbolschreibweise dürfen die gegebenen Parameter und die in vorherigen Teilaufgaben bestimmten Parameter benutzt werden.

Aufgabe	**Punkte**
1. Verständnisfragen	15
2. Kurzrechnungen	18
3. Inkompresible Strömung	21
Gesamt	54

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Jun.-Prof. K. Mulleners
B. Drechsel, C. Hamann

Name, Vorname: ....
Matrikelnummer: ....

1. Verständnisfragen (15 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.
(Nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet.)

Strömungsvisualisierung (1)

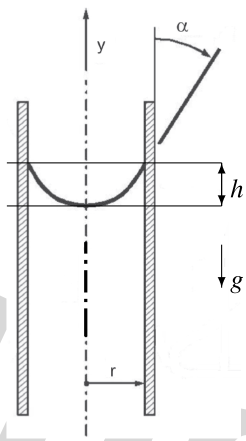
Wann fallen Stromlinien, Bahnlinien und Streichlinien zusammen?

- [ ] Nie.
- [ ] Wenn die Strömung zweidimensional ist.
- [ ] Wenn die Strömung laminar ist.
- [x] Wenn die Strömung stationär ist.

Oberflächenspannung U-Rohr-Manometer (1)

Das gezeigte System sei durch

$\sigma = 0{,}072\,\mathrm{N/m}$ $\quad \alpha = 45°$ $\quad \rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
$g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ $\quad d = 6\,\mathrm{mm}$



beschrieben. Welche Aussagen sind richtig?

- [x] h=$3{,}46 \times 10^{-3}$ m
- [ ] h=$6{,}92 \times 10^{-3}$ m
- [ ] h=$6{,}92 \times 10^{-3}$ N m
- [ ] h=$6{,}92 \times 10^{-6}$ N m

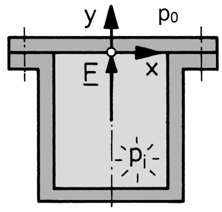
Venturidüsen (1)

- [ ] ...sind nur mit kompressiblen Medien verwendbar.
- [ ] ...messen den dynamischen Druck.
- [x] ...dienen zur Massenstrombestimmung.
- [ ] ...sind frei von Reibungsverlusten.

Druckbehälter (2)

Ein Druckgefäß ist mit einem ebenen Deckel der Fläche A verschlossen und mit einer unter dem gleichmäßigen Innendruck p_i stehenden Flüssigkeit vollständig gefüllt. Der äußere Luftdruck ist p_0. Berechnen Sie die auf die Flansche wirkende Kraft F. Das System wird durch die folgenden Größen

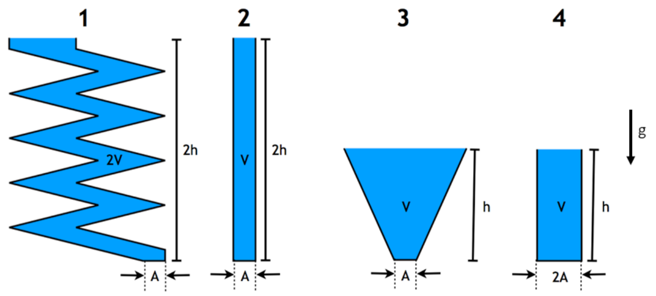
$p_0 = 100\,000\,\mathrm{Pa}$ $\quad p_i = 225\,000\,\mathrm{Pa}$
$A = 0{,}07\,\mathrm{m}^2$



beschrieben. Welche Aussagen sind richtig?

- [ ] F=7875 N m
- [ ] F=15 750 N
- [x] F=8750 N
- [ ] F=7875 N
- [x] Der Druck in einem Fluid wirkt stets in alle Richtungen

Hydrostatik (1)



- [ ] Der Druck am Boden von Gefäß 1 > Gefäß 2
- [x] Der Druck am Boden von Gefäß 2 > Gefäß 4
- [ ] Der Druck am Boden von Gefäß 3 < Gefäß 4.
- [ ] Der Druck am Gefäßboden ist unabhängig von der Fluiddichte.

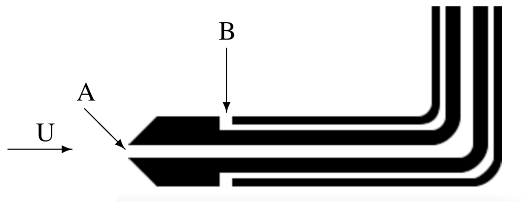
Hydrodynamik (1)

Die Bernoulli-Gleichung in der Form $\frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_2 + \rho g h_2$ darf **nicht** verwendet werden, wenn die Strömung

- [x] ...turbulent ist.
- [x] ...instationär ist.
- [ ] ...reibungsfrei ist.
- [x] ...kompressible ist.

Prandtl-Sonde (1)

- ■ Die Geschwindigkeit an der Öffnung A ist 0.
- ■ An B wird der statische Druck gemessen.
- ☐ B ist der Staupunkt der Sonde.
- ■ Dynamischer Druck = Druck A - Druck B



Interne Strömungen (2)

Rohr A Länge: L, Dicke: D

Rohr B Länge: L, Dicke: 2D

Rohr C Länge: 2L, Dicke: 2D

$\frac{k_s}{D}$ = konstant, $\dot{m}$ = konstant

Geben Sie „>,< oder =“ an.

Der Druckverlust in Rohr A, laminar	>	der Druckverlust in Rohr B, laminar
Der Druckverlust in Rohr A, laminar	>	der Druckverlust in Rohr C, laminar
Der Druckverlust in Rohr A, laminar	<	der Druckverlust in Rohr A, turbulent

Reynoldszahl (1)

Welche der Aussage über die Reynoldszahl stimmt?

- ■ $Re = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}$.
- ■ Je größer Re, desto größer die Einlauflänge in einem Rohr (gleiche Strömungsgeschwindigkeit, gleiches Fluid).
- ☐ Ist die Re-Zahl größer als die kritische Reynoldszahl, ist die Strömung laminar.
- ■ Wenn die Re-Zahl groß ist, können Reibungseffekte vernachlässigt werden.

Plattenströmung **(1)**

Eine unendlich lange, ebene Platte wird mit einer konstanten Geschwindigkeit u_∞ längsangeströmt. Hierfür gelten folgende Annahmen:

Anströmgeschwindigkeit $u_\infty = 10\,\mathrm{m/s}$
Kinematische Viskosität $\nu = 15{,}4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$
Fluiddichte $\rho = 1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{kg/dm^3}$

Dynamische Viskosität $\eta = 18{,}48 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa/s}$
kritische Reynoldszahl $Re_{krit} = 8 \times 10^5$

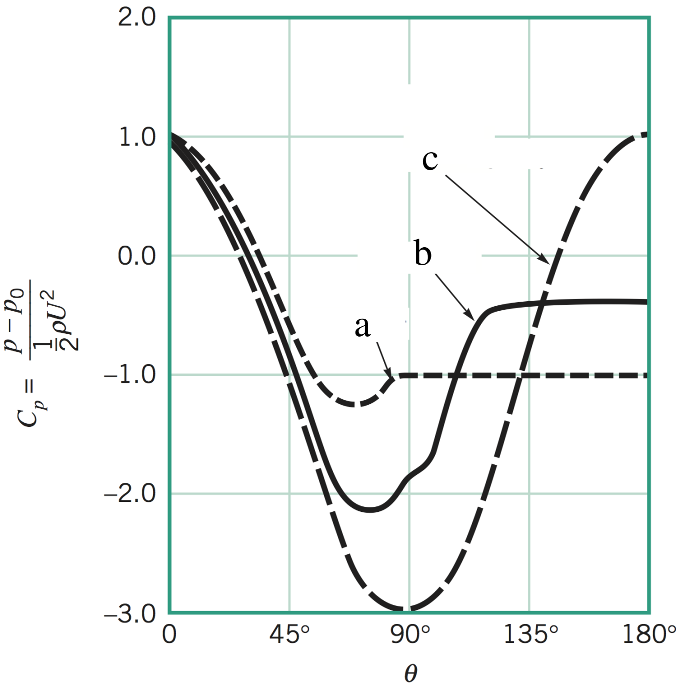
Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ $x_{krit} = 1{,}23$.
- ☐ $x_{krit} = 1{,}48\,\mathrm{m}$.
- ☐ $x_{krit} = 1{,}48\,\mathrm{m/s}$.
- ■ $x_{krit} = 1{,}23\,\mathrm{m}$.
- ☐ Für $x < x_{krit}$ nimmt Re_{krit} ab.

Zylinderumströmung **(1)**

Welche Druckverteilung gehört zu einer

reibungsfreien Umströmung	c
laminaren Umströmung	a
turbulenten Umströmung	b



Kompressible Effekte **(1)**

Ab welcher Machzahl müssen kompressible Effekte berücksichtigt werden?

- [ ] Ausschließlich bei optimal angepassten Lavaldüsen
- [ ] Ma>1
- [x] Ma>0,3
- [ ] Ma>0,5
- [ ] Immer

Optimal angepasste Lavaldüse **(1)**

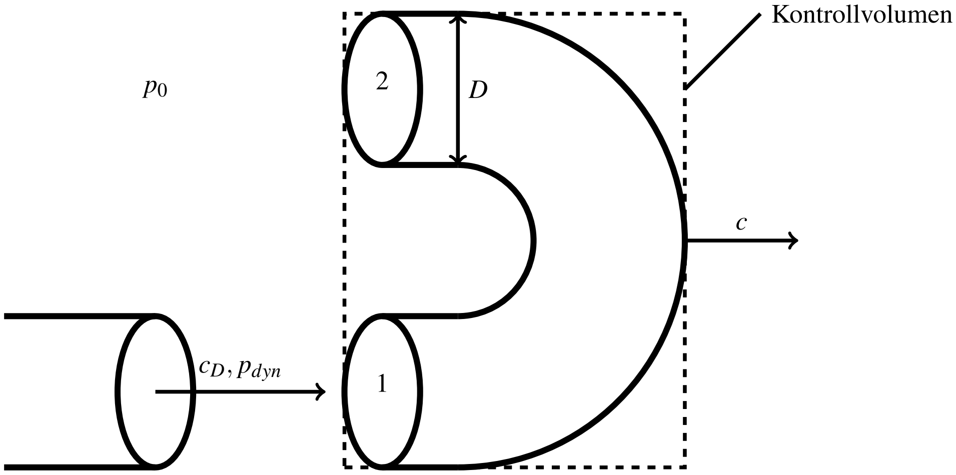
Wenn in einer Lavaldüse (subsonische Anströmung) im Austrittsquerschnitt Ma>1 erreicht wird, gilt auf jeden Fall:

- [ ] Ma<1im engsten Querschnitt
- [ ] Ma>1im engsten Querschnitt
- [x] Ma=1im engsten Querschnitt

2. Kraft an bewegtem 180°-Krümmer (8 Punkte)

Hinweis: Die Ergebnisse der Aufgaben sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen. Geben Sie zusätzlich den Rechenweg an. Für Ergebnisse in Symbolschreibweise dürfen nur die gegebenen Parameter und Konstanten genutzt werden.

Aus einer ruhenden Düse trifft ein Wasserstrahl auf einen 180°-Krümmer mit Durchmesser D. Dieser Krümmer bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit c von der Düse weg. Sämtliches Wasser tritt in Öffnung 1 ein und tritt durch Öffnung 2 wieder aus. An der Düsenöffnung wird der dynamische Druck p_{dyn} gemessen. Die Gewichtskraft sei vernachlässigbar.



Gegeben: D c p_{dyn} ρ p_0

(a) Bestimmen Sie Austrittsgeschwindigkeit des Wassers aus der Düse.

	Symbolschreibweise
c_D	$\sqrt{\frac{2 \cdot p_{dyn}}{\rho}}$ 1

(b) Bestimmen Sie die Kraft von der Krümmerwand auf das Fluid unter der Annahme, dass der Krümmer nicht beschleunigt wird.

	Symbolschreibweise
F_x	$2\rho \cdot A_D \cdot c_D^2$ 1
F_y	0 1

Lösung

Der dynamische Druck ist definiert durch:

$$p_{dyn} = \frac{\rho c^2}{2} \quad 2a \tag{1}$$

Damit ergibt sich die Austrittsgeschwindigkeit des Fluids aus der Düse zu

$$c_D = \sqrt{\frac{2p_{dyn}}{\rho}} \tag{2}$$

Da sich der Krümmer bewegt ergeben sich die Strömungsgeschwindigkeiten im ruhenden Bezugssystem des Krümmers zu

$$c_1 = c_D - c \quad 0{,}5b \tag{3}$$

$$c_2 = c_D + c \quad 0{,}5c \tag{4}$$

Der statische Umgebungsdruck wirkt auf alle Kontrollflächen gleichmäßig, sodass die Wandkräfte nur eine Funktion der Impulskräfte aufgrund der Fluidströmung sind. Es ist leicht erkennbar, dass die y-Komponente der Wandkraft gleich Null sein muss, während sich die x-Komponente zu

$$\sum F_x = 0 = F_{I1} + F_{I2} - F_x \quad 1d \tag{5}$$

$$F_x = \dot{m}(c_1 + c_2) \tag{6}$$

$$= 2\dot{m}c_D \tag{7}$$

ergibt. Da der Massenstrom konstant sein muss, kann dieser über die Parameter an der Düse bestimmt werden,

$$\dot{m} = \rho \cdot A_D \cdot c_D \quad 1e \tag{8}$$

sodass die resultierende Kraft

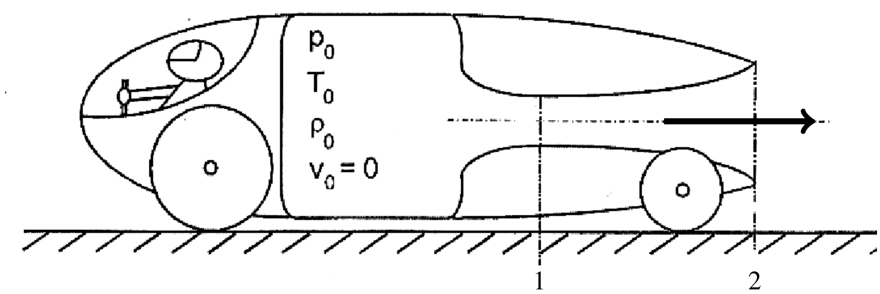
$$F_x = 2\rho \cdot A_D \cdot c_D^2 \tag{9}$$

beträgt.

3. Batmobil (10 Punkte)

<u>Hinweis:</u> Die Ergebnisse der Aufgaben sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen. Geben Sie zusätzlich den Rechenweg an. Für Ergebnisse in Symbolschreibweise dürfen nur die gegebenen Parameter und Konstanten genutzt werden.

Batman hat sein Batmobil modifiziert und möchten nun wissen wieviel Schub die neue Düse erzeugt. Aus einem großen Ruhebehälter (Index 0) strömt das kompressible Fluid durch eine Lavaldüse in die Umgebung aus (Index 2). Am engsten Querschnitt (Index 1) strömt das Fluid genau mit $Ma = 1$.



Gegeben:

Düsenhals	Düsenaustritt	Antriebsgas
T_1	T_2	κ
p_1		R
A_1		

(a) Bestimmen Sie den Antriebsmassenstrom $\dot{m}$.

	Symbolschreibweise
$\dot{m}$	$\frac{p_1}{\sqrt{R \cdot T_1}} \cdot A_1 \cdot \sqrt{\kappa}$ 1

(b) Bestimmen Sie den Schub S der Düse.

	Symbolschreibweise
S	$\frac{p_1}{\sqrt{R \cdot T_1}} \cdot A_1 \cdot \kappa \cdot \sqrt{\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right] \frac{2p_1}{(\kappa-1)\rho_1} + R \cdot T_1}$ 2

Lösung

Der Massenstrom ist definiert als:

$$\dot{m} = A \cdot \rho \cdot c \quad \text{1a}$$

Da aus der Aufgabenstellung bekannt ist, dass im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit herrscht, lässt sich die Strömungsgeschwindigkeit c_1 bestimmen:

$$c_1 = a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1} \quad \text{1b}$$

Die Dichte lässt sich über das Gasgesetz darstellen als

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R \cdot T_1} \quad \text{1c}$$

Der Massenstrom lässt sich am engsten Querschnitt der Düse durch die bekannten Größen und Zusammenhänge als

$$\dot{m} = \frac{p_1}{\sqrt{R \cdot T_1}} \cdot A \cdot \sqrt{\kappa}$$

darstellen. Da der Massenstrom auch im kompressiblen Fall stehts konstant ist, ist dies auch der Massenstrom am Eintritt und Austritt der Düse.

Der Schub ist als

$$S = \dot{m} \cdot c \quad \text{1d}$$

definiert. Da der Massenstrom aus der vorherigen Betrachtung bereits bekannt ist, gilt es nun die Strömungsgeschwindigkeit am Austritt der Düse zu bestimmen.

Mit

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} \left(c_2^2 - c_1^2\right)\right] \quad \text{2e}$$

und der Randbedingung, dass am engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit herrscht

$$c_1 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1};$$

ergibt sich die Austrittsgeschwindigkeit zu:

$$c_2 = \sqrt{\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right] \frac{2\kappa \cdot p_1}{(\kappa - 1)\rho_1} + \kappa \cdot R \cdot T_1} \quad \text{1f}$$

Somit beträgt der Schub:

$$S = \frac{p_1}{\sqrt{R \cdot T_1}} \cdot A \cdot \kappa \cdot \sqrt{\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right] \frac{2 p_1}{(\kappa - 1)\rho_1} + R \cdot T_1}$$

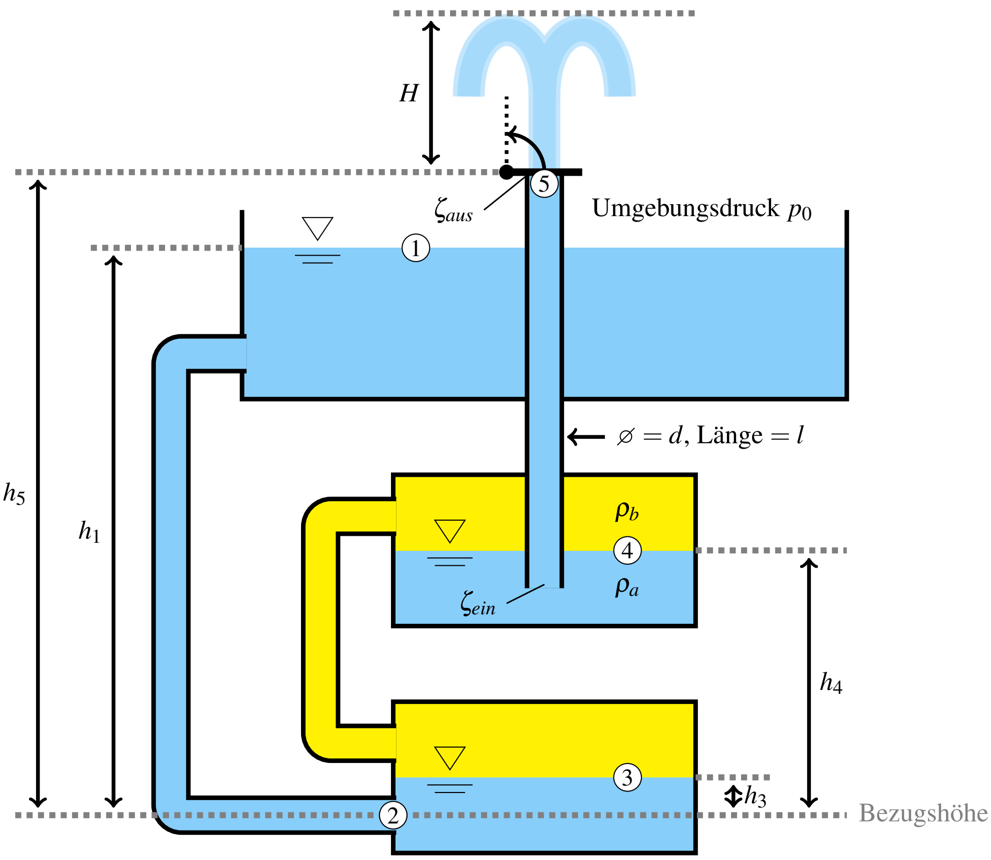
4. Springbrunnen (21 Punkte)

Hinweis: Für die Symbolschreibweise dürfen NUR die gegebenen Parameter, Konstanten und die in vorherigen Teilaufgaben bestimmten Parameter benutzt werden.

Ein Springbrunnen ist mit zwei Fluiden unterschiedlicher Dichte ρ_a und ρ_b gefüllt. Dabei ist $\rho_b \ll \rho_a$, sodass ρ_b vernachlässigt werden kann. Die Klappe ist vorerst geschlossen. Wenn die Klappe geöffnet ist strömt das Fluid a über das mittlere in das obere Becken. Alle Becken sind als unendlich groß anzusehen.

Gegeben:

$h_1 = 18\,\text{m}$	$d = 0{,}4\,\text{m}$	$\rho_a = 1000\,\text{kg/m}^3$
$h_3 = 2\,\text{m}$	$l = 12\,\text{m}$	$g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$
$h_4 = 9\,\text{m}$		$\nu = 1{,}4 \times 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$
$h_5 = 20\,\text{m}$	$\xi_{ein} = 0{,}8$	
	$\xi_{aus} = 0{,}7$	$\frac{k_s}{d} = 6 \times 10^{-3}$



Gefragt:

(a) Bestimmen Sie die Druckdifferenz $p_5 - p_0$ bei geschlossener Klappe!

	Symbolschreibweise	Wert insgesamt 2,5 Pkt
$p_5 - p_0$	$\rho g(-h_5 + h_4 + h_1 - h_3)$ 1	49 050 Pa

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit c_5 bei offener Klappe (ohne Verluste)!

	Symbolschreibweise	Wert
c_5	$\sqrt{2g(h_1 - h_3 + h_4 - h_5)}$ 1	9,90 m/s

(c) Bestimmen Sie die Höhe der Fontäne H bei offener Klappe (ohne Verluste)!

	Symbolschreibweise	Wert
H	$\frac{1}{2g}c_5^2$ 1	5 m

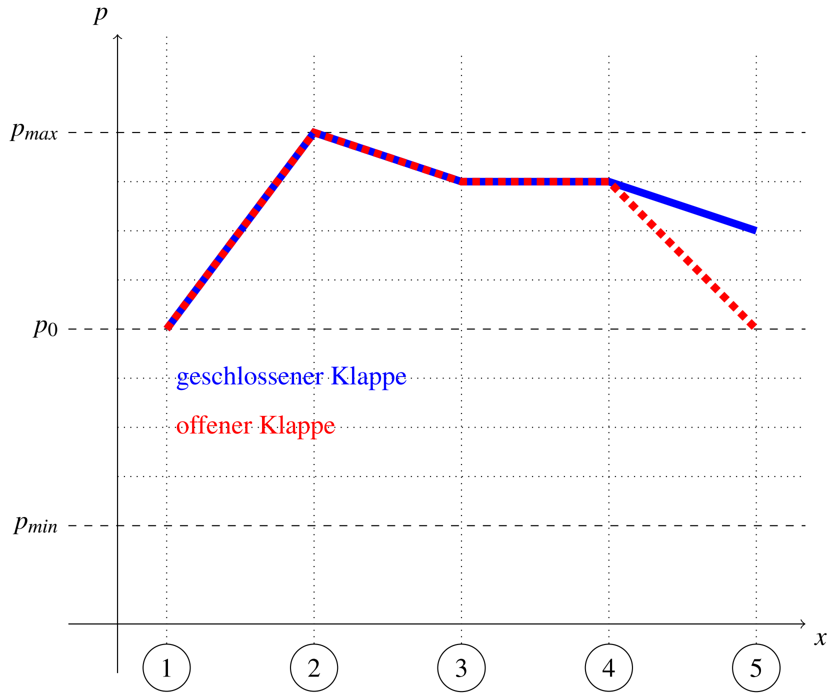
(d) Bestimmen Sie die Rohrreibungszahl λ für die bestimmte Geschwindigkeit c_5 in dem oberen Steigrohr mit der Sandkornrauheit k_s!
(Wenn Sie keine Wert gefunden haben, nehmen Sie $c_5 = 20\,\mathrm{m/s}$.)

	Wert
λ	0,032 1

(e) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit c_5 bei offener Klappe unter Berücksichtigung der Verluste am Einlass ξ_{ein} ,Auslass ξ_{aus} und die Rohrreibung im oberen Steigrohr!

	Symbolschreibweise	Wert
c_5	$\sqrt{\frac{2g(h_1-h_3+h_4-h_5)}{(1+\xi_{ein}+\xi_{aus}+\frac{l}{d}\lambda)}}$ 1	5,325 m/s

(f) Tragen Sie den Druckverlauf bei geschlossener und geöffnete Klappe ein. 6


p
p_{max}
p_0
p_{min}
x
1
2
3
4
5
geschlossener Klappe
offener Klappe

Lösung

(a) Druckunterschied $p_5 - p_0$ bei geschlossener Klappe
Bei geschlossener Klappe $\rightarrow$ keine Strömung.
Hydrostatik:

$$p_1 = p_0 \qquad 0{,}5a$$

$$p_2 = p_1 + \rho g h_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 > p_1 \qquad 0{,}5b$$

$$p_3 = p_2 - \rho g h_3 \quad \Rightarrow \quad p_3 < p_2; p_3 > p_1 \qquad 0{,}5c$$

$$p_4 = p_3 \quad \text{weil } \rho_b \ll \rho_a \qquad 0{,}5d$$

$$p_5 = p_4 - \rho g (h_5 - h_4) \quad \Rightarrow \quad p_5 < p_4 \qquad 0{,}5e$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} p_5 - p_0 &= p_5 + (-p_3 + p_3) - p_0 \\ &= (p_5 - p_4) + (p_3 - p_0) \\ &= -\rho g (h_5 - h_4) + p_2 - \rho g h_3 - p_0 \\ &= -\rho g (h_5 - h_4) + p_0 + \rho g h_1 - \rho g h_3 - p_0 \\ &= \rho g (-h_5 + h_4 + h_1 - h_3) > 0 \end{aligned}$$

(b) Geschwindigkeit c_5 bei offener Klappe (ohne Verluste)
Bernoulli 4 $\longrightarrow$ 5

$$p_4 + \cancel{\frac{1}{2}\rho c_4^2} + z_4 \rho g = p_5 + \frac{1}{2}\rho c_5^2 + z_5 \rho g \qquad 1f$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho c_5^2 &= p_4 - p_0 + \rho g (h_4 - h_5) \\ &= p_3 - p_0 + \rho g (h_4 - h_5) \\ &= p_2 - \rho g h_3 - p_0 + \rho g (h_4 - h_5) \\ &= \cancel{p_1} + \rho g h_1 - \rho g h_3 \cancel{- p_0} + \rho g (h_4 - h_5) \\ \Rightarrow \quad c_5 &= \sqrt{2g(h_1 - h_3 + h_4 - h_5)} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho c_5^2 &= (p_5 - p_0)|_{geschlossen} \\ \Rightarrow \quad c_5 &= \sqrt{2g(h_1 - h_3 + h_4 - h_5)} \end{aligned}$$

(c) Höhe der Fontäne H bei offener Klappe (ohne Verluste)
Bernoulli 5 $\longrightarrow F$

$$\cancel{p_5} + \frac{1}{2}\rho c_5^2 + z_5 \rho g = \cancel{p_F} + \cancel{\frac{1}{2}\rho c_F^2} + z_F \rho g \qquad 1g$$

$$\rho g (z_H - z_5) = \frac{1}{2}\rho c_5^2$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{1}{2g} c_5^2$$

(d) Rohrreibungszahl λ für diese Geschwindigkeit
Reynoldszahl

$$Re = \frac{c_5 d}{\nu} = 2{,}83 \times 10^6 \quad 1h \rightarrow mit\ c_5 = 20\,\mathrm{m/s} \Rightarrow Re = 5{,}7 \times 10^6 \Rightarrow \lambda = 0{,}032$$

Aus dem Moody-Diagram

$$\frac{k_s}{d} = 6 \times 10^{-3}$$
$$\Rightarrow \lambda = 0{,}032$$

(e) Geschwindigkeit c_5 bei offener Klappe unter Berücksichtigung der Verluste

$$p_4 + \cancel{\frac{1}{2}\rho c_4^2} + z_4\rho g = p_5 + \frac{1}{2}\rho c_5^2 + z_5\rho g + \Delta p_{45} \quad 1i$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho c_5^2 + \Delta p_{45} = p_4 - p_0 + \rho g(h_4 - h_5)$$
$$= \rho g(h_1 - h_3 + h_4 - h_5)$$

Druckverlust

$$\Delta p_{45} = \frac{1}{2}\rho c_5^2 \left(\xi_{ein} + \xi_{aus} + \frac{l}{d}\lambda\right) \quad 1j$$

Zusammen

$$\frac{1}{2}\rho c_5^2 + \Delta p_{45} = \rho g(h_1 - h_3 + h_4 - h_5)$$
$$\frac{1}{2}\rho c_5^2 \left(1 + \xi_{ein} + \xi_{aus} + \frac{l}{d}\lambda\right) = \rho g(h_1 - h_3 + h_4 - h_5)$$
$$\Rightarrow \quad c_5 = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_3 + h_4 - h_5)}{(1 + \xi_{ein} + \xi_{aus} + \frac{l}{d}\lambda)}}$$

(f) Druckverlauf

- ☐ Je Teilstück 0,5 Punkte (4*2*0,5)
- ☐ $p_5 > p_0$ für geschlossener Klappe 1
- ☐ $p_1 = p_5 = p_0$ für offene Klappe 1