

Klausur

Strömungsmechanik 1

Herbst 2015

25. August 2015, Beginn 16:00 Uhr

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht, => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- Mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

Weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Aufgabe	Punkte
1. Verständnisfragen	13
2. Inkompressible Strömungen	30
3. Kompressible Strömungen	8,5
Gesamt	51,5

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

**Prof. Dr.-Ing. J. Seume
B. Drechsel, C. Hamann, T. Hauptmann**

1. Verständnisfragen (13 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.
(Nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet.)

Fluideigenschaften

(1)

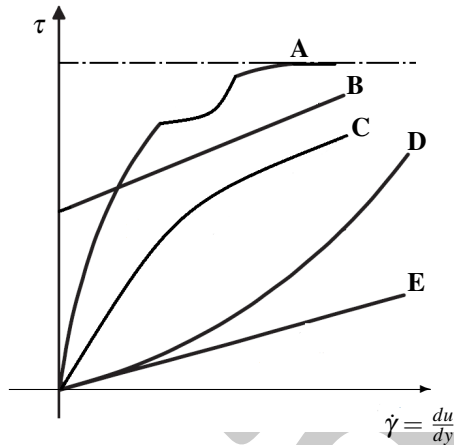
Der Druck in einem Fluid wirkt stets

- ...aufwärts.
- ...abwärts.
- ...in Strömungsrichtung.
- ...in alle Richtungen.

Viskosität von Flüssigkeiten

(1)

Ordnen Sie die Flüssigkeiten den gezeigten Viskositätsverläufen zu



- D Scherdickende Flüssigkeit
- E Newtonsche Flüssigkeit
- C Scherdünnende Flüssigkeit
- B Bingham Flüssigkeit

Oberflächenspannung

(1)

- Die Oberflächenspannung ist nicht von der Temperatur abhängig.
- Der Kontaktwinkel kann nur Werte zwischen 0° und 90° annehmen.
- Die Oberflächenspannung ist eine Kraft pro Länge.
- Für eine Seifenblase ist die Differenz zwischen Innen und Außendruck gleich $\frac{4\sigma}{R}$, wobei σ die Oberflächenspannung und R der Radius der Seifenblase ist.

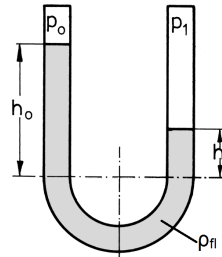
Höhendifferenz U-Rohr-Manometer

(2)

Berechnen Sie die Höhendifferenz $h_0 - h_1$, die sich im gezeigten U-Rohr-Manometer einstellt, wenn auf den beiden Schenkeln die Drücke p_0 und p_1 lasten. Das System wird durch die folgenden Größen

$$p_1 = 100\,500\text{ Pa} \quad p_0 = 100\,000\text{ Pa}$$

$$g = 9.81\text{ m/s}^2 \quad \rho_{fl} = 789\text{ kg/m}^3$$



beschrieben. Welche Aussagen sind richtig?

- $h_0 - h_1 = 32.3 \times 10^{-3}\text{ m}$
- $h_0 - h_1 = 15.48\text{ m}$
- $h_0 - h_1 = 64.6 \times 10^{-3}\text{ m}$
- $h_0 - h_1 = 0.15\text{ m}$

Dimensionslose Kennzahlen

(1)

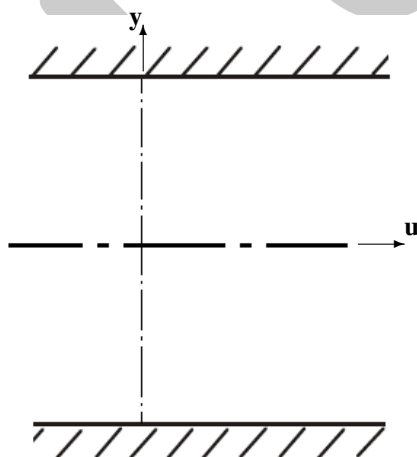
Welche dimensionslose Kennzahl setzt die Trägheitskräfte und die Reibungskräfte eines Fluides ins Verhältnis?

- Die Seume-Zahl (Se-Zahl)
- Die Reynolds-Zahl (Re-Zahl)
- Die Froude-Zahl (Fr-Zahl)
- Die Strouhal-Zahl (Sr-Zahl)

Rohrströmung

(2)

Zeichnen und benennen Sie ein laminares sowie ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil, ungefähr gleichen Volumenstroms, übereinander in den gegebenen Rohrquerschnitt



Moody-Diagramm

(1)

Welche der Aussagen stimmen für eine Rohrströmung mit

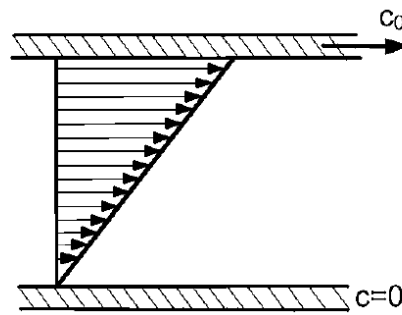
Mittlere Geschwindigkeit $\bar{c}_m = 120 \text{ m/s}$; Radius $r = 10 \text{ mm}$; Kinematische Viskosität $\nu = 1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$;
Sandkornrauheit $k_s = 1.6 \times 10^{-4} \text{ m}$

- Die Strömung ist laminar.
- Die Strömung ist turbulent.
- Das Rohr ist als hydraulisch glatt anzusehen.
- Das Rohr ist als hydraulisch rauh anzusehen.

Haftbedingung

(1)

Was bedeutet Haftbedingung?



- Die Geschwindigkeit an der Wand ist 0.
- Die mittlere Geschwindigkeit der Strömung ist gleich der Geschwindigkeit an der Wand.
- Der Geschwindigkeitsgradient an der Wand ist gleich 0.

Auftriebskraft am Tragflügel

(2)

Eine Boeing 747 hat eine projizierte Flügelfläche von 511 m^2 und ein Startmasse von 320 t. Beim Abheben beträgt die Geschwindigkeit $234 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (Dichte $\rho = 1,23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$). Wie groß ist der notwendige Auftriebsbeiwert c_A beim Start?

- 1,55
- 0,18
- 2,37

Plattenströmung

(1)

Eine unendlich lange, ebene Platte wird mit einer konstanten Geschwindigkeit u_∞ längsangeströmt. Hierfür gelten folgende Annahmen:

Anströmgeschwindigkeit $u_\infty = 10 \text{ m/s}$

Dynamische Viskosität $\eta = 18.48 \times 10^{-6} \text{ Pa/s}$

Kinematische Viskosität $\nu = 15.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Fluiddichte $\rho = 1.2 \times 10^3 \text{ kg/dm}^3$

kritische Reynoldszahl $Re_{krit} = 8 \times 10^5$

Welche Aussagen über den laminar-turbulenten Umschlag sind richtig?

- $x_{krit} = 1.23$.
- $x_{krit} = 1.48 \text{ m}$.
- $x_{krit} = 1.48 \text{ m/s}$.
- $x_{krit} = 1.23 \text{ m}$.
- Für $x < x_{krit}$ nimmt Re_{krit} ab.

Lösung

2. Inkompressible Strömungen

2.1. In einen Fluss gestürzter Personenwagen (8 Punkte)



Der abgebildete Personenwagen ist gerade in einen Fluß gestürzt, sodass der Innendruck im Fahrzeug noch Atmosphärendruck p_0 ist.

Die Fahrzeugtür kann näherungsweise als ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b betrachtet werden. Die Höhe des Wasserspiegels über der Oberkante der Tür sei h .

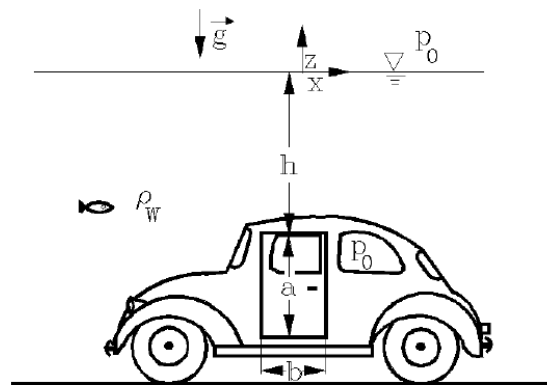


Abb. 1 In einen Fluss gestürzter Personenwagen

Gegeben:

$$h = 5 \text{ cm}$$

$$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$a = 95 \text{ cm}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$b = 60 \text{ cm}$$

$$F_M = 500 \text{ N}$$

Gefragt:

- (a) Wie groß ist die zum Öffnen der Tür notwendige Kraft F , wenn diese Kraft senkrecht zur Türfläche und im Abstand $\frac{3b}{4}$ von der vertikalen Drehachse ($[A]$) der Tür angreifen kann?

Als Hilfestellung ist das Schnittbild der angreifenden Kräfte dargestellt mit der Kraft der Flüssigkeitssäule F_{F1} .

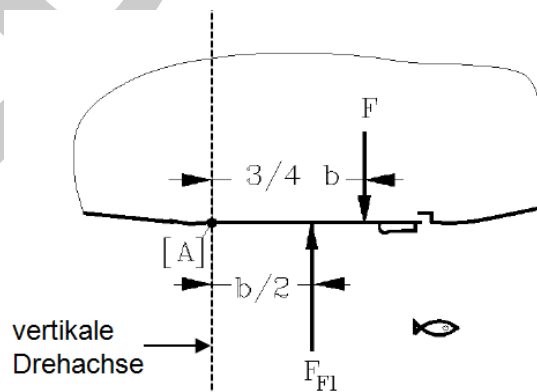


Abb. 2 Schnittbild Kräftebilanz

	Symbolschreibweise	Wert
F	$\frac{2}{3}\rho_W \cdot g \cdot h \cdot a \cdot b \left(1 + \frac{a}{2h}\right)$ ①	1.957kN ①

- (b) Bis zu Welcher Höhe x muss das Wasser im Fahrzeug steigen, damit ein Mensch mit der Muskelkraft F_M die Tür zu öffnen vermag?
Als Hilfestellung ist das unten dargestellte Schnittbild gegeben mit F_{Fl_i} der Flüssigkeit im Innern des Wagens und F_{Fl_a} der Flüssigkeit ausserhalb des Waagens.

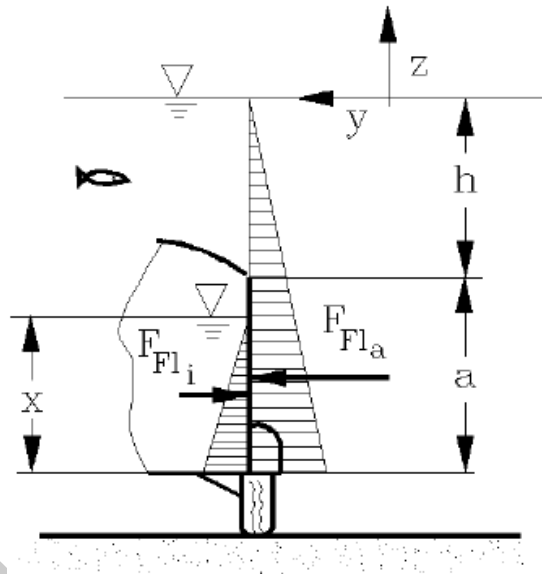


Abb. 3 Wasserhöhe x

	Symbolschreibweise	Wert
x	$\sqrt{2 \cdot a \cdot h \cdot \left(1 + \frac{a}{2h}\right) - \frac{3 \cdot F_M}{\rho_W \cdot g \cdot b}}$ ①	86cm ①

Lösung

a) Kraft F

Der Druck am Flächenschwerpunkt z_S der Tür ist

$$p_S = -\rho_W \cdot g \cdot z_S \quad (1)$$

$$p_S = \rho_W \cdot g \cdot \left(h + \frac{a}{2}\right) \quad (1a) \quad (2)$$

Der Betrag der von außen auf die Tür wirkenden Kraft ist das Produkt dieses Druckes mit der Türfläche A:

$$F_{Fl} = p_S \cdot A \quad (3)$$

$$F_{F1} = \rho_W \cdot g \cdot a \cdot b \cdot h \cdot \left(1 + \frac{a}{2h}\right) \quad (4)$$

Die notwendige Kraft wird mittels Momentenbilanz um das Scharnier [A] der dargestellten Tür ermittelt:

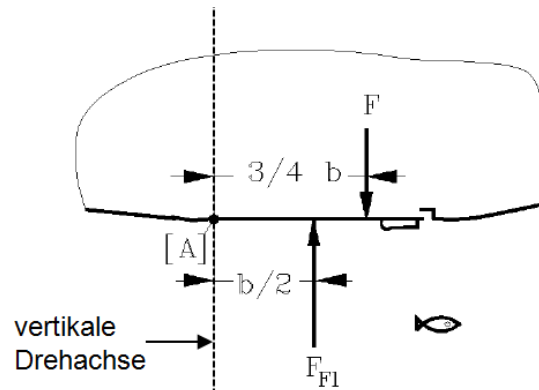


Abb. 4 Kräftebilanz

$$F \cdot \frac{3}{4} \cdot b = F_{F1} \cdot \frac{1}{2} \cdot b \quad (5)$$

$$\Rightarrow F = \frac{2}{3} \cdot F_{F1} \quad (6)$$

$$F = \frac{2}{3} \cdot \rho_W \cdot g \cdot h \cdot a \cdot b \cdot \left(1 + \frac{a}{2h}\right) \quad (7)$$

$$F = 1,957 \text{ kN} \quad (8)$$

b) Wasserhöhe x im Fahrzeug

Die resultierende Kraft ist

$$F_y = F_{F1a} - F_{F1i} \quad (9)$$

Die Kraft F_{F1a} ist gleich F_{F1} aus dem Aufgabenteil a) (Gleichung (4)). Die durch die Flüssigkeit im Inneren des Wagens verursachte Kraft ist

$$F_{F1i} = \frac{1}{2} \cdot \rho_W \cdot g \cdot b \cdot x^2 \quad (10)$$

Setzen wir in die rechte Seite der Gleichung (9) die resultierende Kraft F_y und auf der linken Seite die aufwendbare Kraft F_M ein und lösen nach der unbekanntenen Wasserhöhe x auf, so erhalten wir:

$$x = \sqrt{2 \cdot a \cdot h \cdot \left(1 + \frac{a}{2h}\right) - \frac{3 \cdot F_M}{\rho_W \cdot g \cdot b}} \quad (11)$$

$$x = 86 \text{ cm} \quad (12)$$

Für $x = 0$ wird wieder das Ergebnis aus a) erhalten.

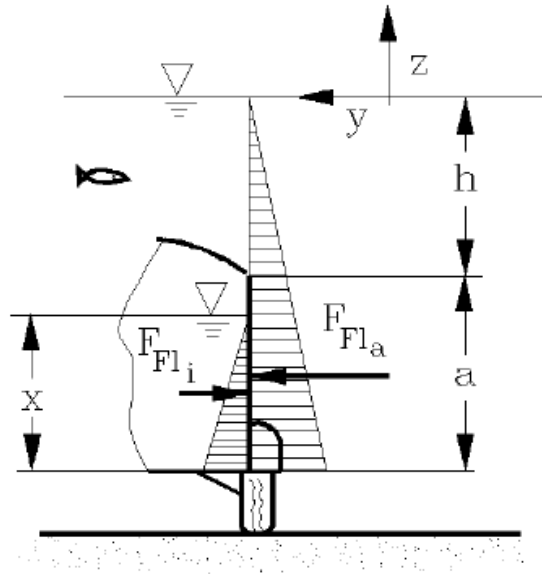


Abb. 5 Wasserhöhe x

2.2. Der Feuerwehreinsatz (22 Punkte)



Es brennt in der Appelstraße 9 im 1. OG. Wichtige Klausuren haben sich an einem Teelicht entzündet und die Feuerwehr muss anrücken. Vor Ort angekommen baut die Feuerwehr einen so genannten Löschmonitor auf und will so das Wasser in den brennenden Raum befördern.

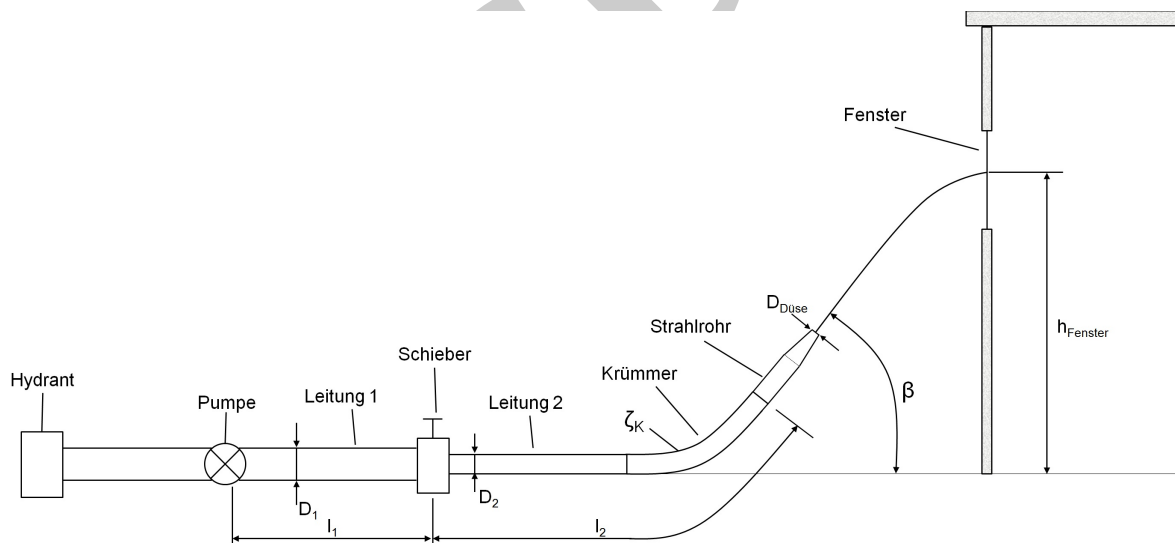


Abb. 6 Löscheinsatz in der Appelstraße 9

Gegeben:

$$D_1 = 75 \text{ mm}$$

$$h_{\text{Fenster}} = 5 \text{ m}$$

$$p_{\text{amb}} = 1 \text{ bar}$$

$$\lambda_2 = 0,015$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$D_2 = 42 \text{ mm}$$

$$l_1 = 20 \text{ m}$$

$$p_1 = 9 \text{ bar}$$

$$\zeta_K = 0,4$$

$$v = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$D_{\text{Düse}} = 12 \text{ mm}$$

$$l_2 = 40 \text{ m}$$

$$\dot{V} = 200 \text{ dm}^3/\text{min}$$

$$k_{s,1} = 0,015 \text{ mm}$$

$$\eta_{\text{Pumpe}} = 0,8$$


Hinweis 1: Der Höhenunterschied zwischen Düse und Leitung ist zu vernachlässigen.

Hinweis 2: Die Verluste im Strahlrohr sind zu vernachlässigen.

2.2.1

- a) Bestimmen Sie den Neigungswinkel β , des Strahlrohrs (Düse), damit das austretende Wasser im Scheitelpunkt das Fenster (h_{Fenster}) erreicht.

Hinweis: Der Luftwiderstand kann vernachlässigt werden.

	Wert
$\beta_{\text{Düse}}$	19.6° 

Lösung

- b) Bestimmen Sie den Druckverlust der durch den Schieber verursacht wird, wenn der Maschinist direkt hinter der Pumpe den Druck p_1 misst (am Übergang zwischen Pumpe und Leitung 1).
Hinweis: Der Schieber wird mit derselben Geschwindigkeit wie das zweite Rohrsegment durchströmt.

	Wert
$p_{V,Schieber}$	321 814.2 Pa 0.5

- c) Bestimmen Sie die Pumpenleistung, die erforderlich ist.
Hinweis: Der gesamte Leistungseintrag in das gezeigte System geschieht an der Pumpe.

	Wert
P	5.3 kW 0.5

2.2.2

Plötzlich geht die Pumpe aus, weil vergessen wurde Benzin nachzufüllen. Herr Rübe beobachtet dieses und überlegt, ob die Pumpe nicht auch anders betrieben werden kann. Hierfür soll ein Schaufelrad an den Antrieb der Pumpe montiert werden und Wasser aus dem obersten Stockwerk des Hochhaus gegenüber auf das Schaufelrad gerichtet werden.

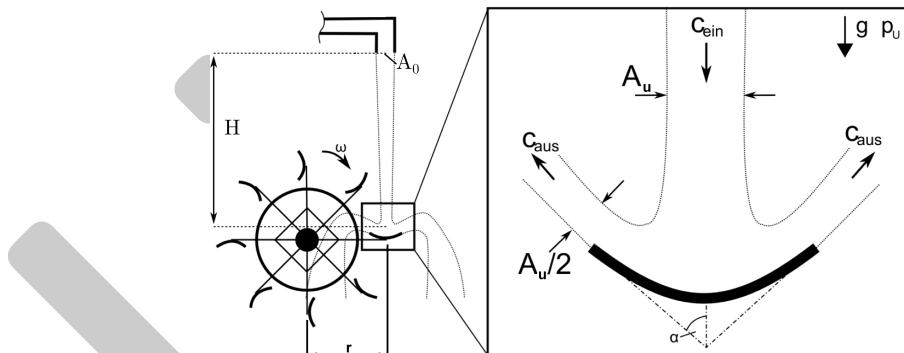


Abb. 7 Schaufelrad als alternativer Pumpenantrieb

Gegeben:

$$A_0 = 20 \text{ cm}^2$$

$$n_{\text{Antrieb}} = 150/\text{min}$$

$$c_0 = 9 \text{ m/s}$$

$$r = 1 \text{ m}$$

$$H = 75 \text{ m}$$

- a) Bestimmen Sie die Fläche des Wasserstrahls A_u der sich am Schaufelrad einstellt.

	Wert
A_u	4.57 cm ² 0.5

- b) Bestimmen Sie den Winkel der Schaufelumlenkung α , der erforderlich ist, um die oben berechnete Pumpenleistung einzustellen.
Hinweis 1: Weitere Verluste in der Pumpe werden nicht berücksichtigt.
Hinweis 2: Wenn Sie zuvor keine Pumpenleistung berechnen konnten, nehmen sie $P = 4\text{kW}$ an.

	Wert
α	71.82° 0.5

Lösung

3.1 a)

Aufstellen der verlustfreien Bernoulli Gleichung von Punkt 1 (Austritt der Düse) nach Punkt 2 (Scheitelpunkt):

$$\rho \frac{c_1^2}{2} + p_1 + g \cdot \rho \cdot z_1 = \rho \frac{c_2^2}{2} + p_2 + g \cdot \rho \cdot z_2 \quad \text{1a} \quad (13)$$

Mit

$$z_1 = 0 \quad z_2 = h_{\text{Fenster}} \quad p_1 = p_2 = p_{\text{amb}} \quad \text{0,5b} \quad (14)$$

Geschwindigkeit im Scheitelpunkt lässt sich mit Hilfe von c_1 ausdrücken: Horizontale Komponente von c_2 entspricht der horizontalen Komponente von c_1 , da der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Vertikale Komponente im Scheitelpunkt ist $c_{2,\text{vertikal}} = 0$.

$$c_2 = c_1 \cos \beta \quad \text{1c} \quad (15)$$

Die Austrittsgeschwindigkeit der Düse c_1 ergibt sich aus dem Volumenstrom und dem Durchmesser der Düse

$$c_1 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi D_{\text{Düse}}^2} \quad \text{0.5d} \quad (16)$$

Einsetzen von (??) und (??) in (??) und Auflösen nach β .

$$\beta = \arccos \sqrt{1 - \frac{2 \cdot g \cdot h_{\text{Fenster}}}{c_1^2}} \quad \text{1e} \quad (17)$$

b)

Bernoulli-Gleichung zwischen Austritt der Pumpe und dem Austritt des Strahlrohrs

$$\rho \frac{c_1^2}{2} + p_1 + g \cdot \rho \cdot z_1 + \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{V}} = \rho \frac{c_{\text{Düse}}^2}{2} + p_{\text{amb}} + g \cdot \rho \cdot z_{\text{Düse}} + \Delta p_{\text{Verlust}} \quad (18)$$

Da die Bilanzierung kurz hinter der Pumpe beginnt und der Höhenunterschied in der Leitung vernachlässigbar ist, vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\rho \frac{c_1^2}{2} + p_1 = \rho \frac{c_2^2}{2} + p_{\text{amb}} + \Delta p_{\text{Verlust}} \quad \text{1f}$$

Die Verluste $\Delta p_{\text{Verlust}}$ lassen sich gemäß Gl. 6.21 der FS in Rohrreibungsverluste und Verluste durch Rohreinbauten (Krümmer usw.) unterteilen:

$$\Delta p_{12} = \sum_k \frac{1}{2} \rho c_k^2 \lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2} \rho c_i^2 \zeta_i \quad \text{(20)}$$

Für das vorliegende System ergibt sich daher

$$\Delta p_{12} = \frac{1}{2} \rho c_1^2 \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \frac{1}{2} \rho c_2^2 \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \frac{1}{2} \rho c_2^2 (\zeta_{\text{Schieber}} + \zeta_K) \quad \text{(21)}$$

$$\text{jew. } \text{0,5} \rightarrow \sum \text{2g}$$

Die Geschwindigkeiten in den Schlauchsegmenten ergeben sich aus der Massenstromerhaltung zu:

$$c_1 = \frac{c_{\text{Düse}} \cdot A_{\text{Düse}}}{A_1} = 0,75 \text{ m/s} \quad \text{0,5h}$$

$$c_2 = \frac{c_{\text{Düse}} \cdot A_{\text{Düse}}}{A_2} = 2,41 \text{ m/s} \quad \text{0,5i}$$

Bestimmung des Druckverlust in Leitung 1:

$$Re_1 = \frac{c_1 \cdot D_1}{\nu} = 5,66 \times 10^4 \quad \text{1j}$$

$$\frac{k_{s,1}}{D_1} = 2 \times 10^{-4} \quad \text{(26)}$$

Aus dem Moodydiagramm lässt sich hiermit der Verlustbeiwert bestimmen.

$$\lambda_1 = 0,0215 \quad \text{1k}$$

Der Druckverlust in Leitung 1 aufgrund der Rohrreibung beträgt daher

$$p_{V,1R} = \frac{1}{2} \rho c_1^2 \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} = 1632 \text{ Pa} \quad \text{(28)}$$

Bestimmung des Druckverlust in Leitung 2:

Da die Rohrreibungszahl bereits gegeben ist, ergibt sich der Druckverlust aufgrund von Reibung hier direkt zu

$$p_{V,2R} = \frac{1}{2} \rho c_2^2 \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} = 41347,8 \text{ Pa} \quad \text{(29)}$$

Des Weiteren treten auch Verluste im Krümmer auf

$$p_{V,2K} = \frac{1}{2} \rho c_2^2 \zeta_K = 1157,7 \text{ Pa} \quad \text{(30)}$$

Damit die Verluste im Schieber berechnet werden können, wird Gl. ?? nach den Schieberverlusten umgestellt

$$p_{V,2S} = \frac{\rho}{2} [c_1^2 - c_{Düse}^2] + p_1 - p_{amb} - (p_{V,1R} + p_{V,2R} + p_{V,2K}) \quad (31)$$

$$= \quad \quad \quad = 321\,814\text{ Pa} \quad (32)$$

c)

Die erforderliche Pumpenleistung ergibt sich aus der umgeformten Bernoulligleichung von Pumpe zu Austritt des Strahlrohrs

$$P_{Pumpe} = \frac{\dot{V}}{\eta_{Pumpe}} \left[\frac{\rho}{2} [c_1^2 - c_{Düse}^2] + p_1 - p_{amb} + (p_{V,1R} + p_{V,2R} + p_{V,2K} + p_{V,2S}) \right] \quad (33)$$

$$= 5.3\text{ kW} \quad (11) \quad (34)$$

3.2 a)

Die Geschwindigkeit des Wassers auf Höhe der Schaufel aufgrund der Erdbeschleunigung

$$c_1 = \sqrt{2 \left[\frac{c_0^2}{2} + g \cdot H \right]} = 39.40\text{ m/s} \quad (1m) \quad (35)$$

Durch die Beschleunigung des Wassers wird der Querschnitt des Strahls verjüngt (Kontinuität muss gelten; Masse bleibt konstant):

$$A_1 = \frac{c_0 \cdot A_0}{c_1} = 4.57\text{ cm}^2 \quad (0.5n) \quad (36)$$

b)

Kraft F aus Impulsbilanz um Schaufel:

$$F = \rho (c_{ein}^2 \cdot A_{ein} + 2c_{aus}^2 \cdot A_{aus} \cos \alpha) \quad (37)$$

$$\text{jew. } (1) \text{ für die vier versch. Terme der Impulsgleichung } \rightarrow \Sigma (40) \quad (38)$$

Die Kraft berechnet sich aus der erforderlichen Pumpenleistung und dem Hebelarm am Schaufelrad

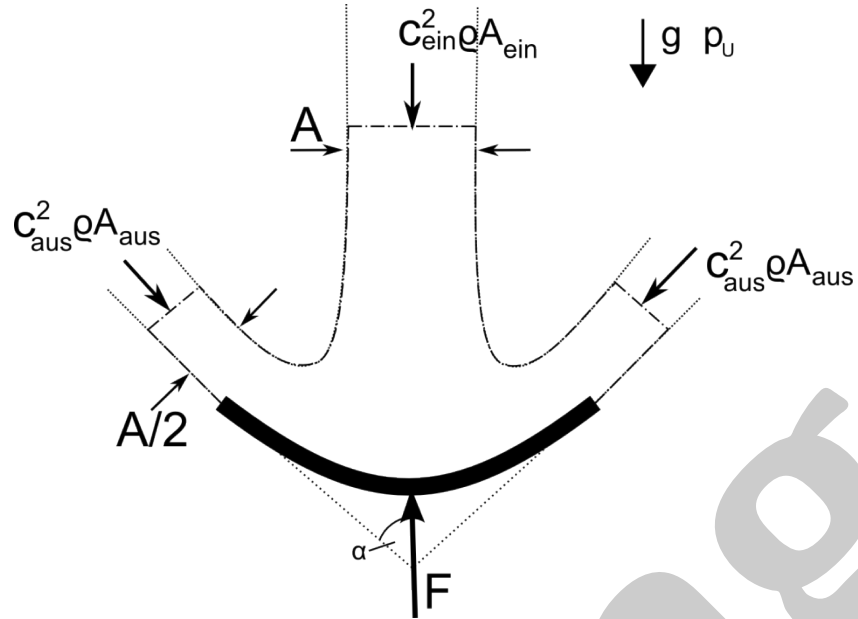
$$F = \frac{M}{r} = \frac{P}{2\pi n \cdot r} \quad (39)$$

Geschwindigkeit c_{aus} folgt aus Bernoulli von Eintritt zum Austritt aus Bilanzebene:

$$c_{ein} = c_{aus} \quad (1p) \quad (40)$$

Die Geschwindigkeit mit der der Wasserstrahl auf das Schaufelrad trifft beträgt:

$$c_{ein} = c_1 - \omega \cdot r = c_1 - 2\pi \cdot n \cdot r = 23.69\text{ m/s} \quad (1q) \quad (41)$$



Somit beträgt der Umlenkwinkel

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\left[\frac{F}{\rho} - c_{ein}^2 \cdot A_1 \right]}{c_{ein}^2 \cdot A_1} \right) \quad (42)$$

3. Die Düse (8,5 Punkte)

Eine divergente Düse wird mit Luft ($Ma=0,2$) durchströmt. Vor der Düse beträgt die Temperatur $T_1 = 26,85^\circ\text{C}$ und der Druck $p_1 = 101\,325\text{ Pa}$. Hinter der Düse beträgt der Druck $p_2 = 84\,096\text{ Pa}$.

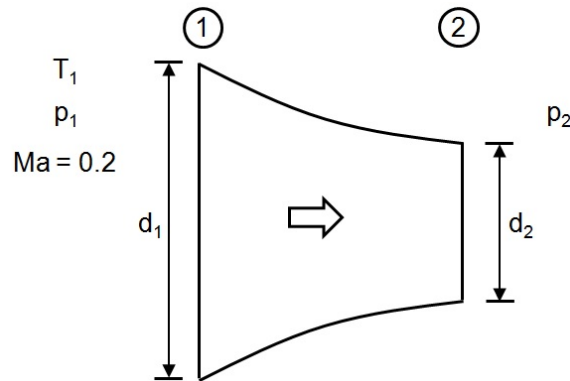


Abb. 8 Divergente Düse

Gegeben:

$d_1 = 10\text{ cm}$
 $d_2 = 6\text{ cm}$
 $Ma = 0,2$

$p_1 = 101\,325\text{ Pa}$
 $p_2 = 84\,096\text{ Pa}$
 $\kappa = 1,4$

$T_1 = 26,85^\circ\text{C}$
 $R_i = 287\text{ N m K/kg}$

Gefragt:

- a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit c_1 am Einlass der Düse.

	Wert
c_1	69.44 m/s ①

- b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit c_2 am Auslass der Düse für eine inkompressible und adiabate Strömung.

	Wert
c_2	185.13 m/s ①

- c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit c_2 am Auslass der Düse für eine kompressible und isentrope Strömung.

	Wert
c_2	190.13 m/s ①

Lösung

4 a)

Berechnen der Geschwindigkeit c_1 mit

$$Ma = \frac{c_1}{a} \quad (43)$$

und

$$a = \sqrt{\kappa \cdot R_i \cdot T_1} \quad (1a) \quad (44)$$

ergibt

$$c_1 = Ma \cdot \sqrt{\kappa \cdot R_i \cdot T_1} = 69.44 \text{ m/s} \quad (45)$$

4 b)

c_2 für eine inkompressible Strömung:

Konti:

$$m_{\text{ein}} = m_{\text{aus}} \quad (1b) \quad (46)$$

$$c_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot c_1 = 185.13 \text{ m/s} \quad (1c) \quad (47)$$

4 c)

c_2 für eine kompressible Strömung:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2) \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (2d) \quad (48)$$

mit

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R_i \cdot T_1} \quad (0.5e) \quad (49)$$

und nach c_2 aufgelöst ergibt

$$c_2 = 190.13 \text{ m/s.}$$

Formelsammlung

Viskosität

$$\eta = \nu \rho \quad (6.11)$$

mit η : dynamische Viskosität, [Ns/m²]

ν : kinematische Viskosität, [m²/s]

ρ : Dichte, [kg/m³]

Newtonsches Fluid:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (6.12)$$

mit τ : Scherspannung, [N/m²]

u : Strömungsgeschwindigkeit, [m/s]

y : Koordinate senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit, [m]

Oberflächenspannung und Kapillarität

Drucksprung Δp in der Phasengrenzfläche eines kugelförmigen Tropfens mit dem Radius r :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad ; \quad \text{mit } \sigma : \text{Oberflächenspannung, [N/m]} \quad (6.13)$$

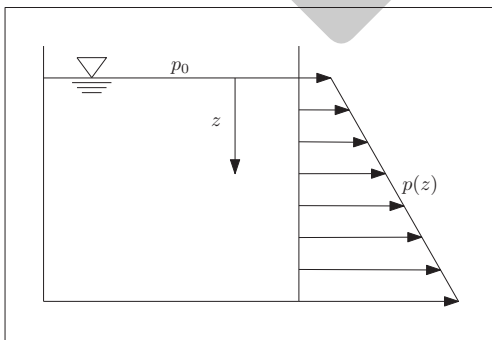
Steighöhe h bei Kapillaren mit kreisförmigem Querschnitt:

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r} \quad ; \quad \text{mit } \alpha : \text{Randwinkel} \quad (6.14)$$

Hydrostatik

Hydrostatischer Druck:

$$p(z) = p_0 + \rho g z \quad (6.15)$$



Hydrostatischer Auftrieb:

$$F_A = \rho g V \quad ; \quad \text{mit } V : \text{Volumen der verdrängten Flüssigkeit} \quad (6.16)$$

Hydrodynamik

Massenbilanz

$$\frac{dm_{KV}}{dt} = \iiint \rho \vec{n} \cdot \vec{c} \, dA \quad (6.17)$$

mit \vec{n} : Normalvektor
 KV : beliebiges Kontrollvolumen

Impulssatz

$$\iint \rho \vec{c} \vec{n} \cdot \vec{c} \, dA = - \iint p \vec{n} \, dA + \iiint \rho \vec{g} \, dV + \vec{F}_R + \vec{F}_{12} \quad (6.18)$$

mit \vec{F}_R : Reibungskraft
 \vec{F}_{12} : Haltekraft/Interaktion mit Wänden

Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2} \rho c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad (6.19)$$

Erweiterung für verlustbehaftete Strömungen mit Energiezufuhr:

$$\frac{1}{2} \rho c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 + \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{V}} = \frac{1}{2} \rho c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{12} \quad (6.20)$$

mit $\dot{W}_{12} > 0$: zwischen Position 1 und 2 zugeführte Leistung, [Nms⁻¹]
 \dot{V} : Volumenstrom, [m³/s]
 Δp_{12} : Druckverlust zwischen Position 1 und 2, [Pa]

Druckverlust in Rohrströmungen:

$$\Delta p_{12} = \sum_k \frac{1}{2} \rho c_k^2 \lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2} \rho c_i^2 \xi_i \quad (6.21)$$

mit λ_k : Rohrreibungszahl
 l_k : Länge des Rohrabschnitts k
 d_k : Durchmesser des Rohrabschnitts k
 ξ_i : weitere Verlustbeiwerte des Rohrabschnitts i

Impulsmomentensatz

$$(\rho_2 c_2^2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2} + p_2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2}) - (\rho_1 c_1^2 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1} + p_1 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1}) = \sum \vec{M}_{12} \quad (6.22)$$

mit $\sum \vec{M}_{12}$: Summe der äußeren, an der Oberfläche der Kontrollraumes angreifenden Momente
 \vec{e}_t : Einheitsvektor, in Strömungsrichtung zeigend

Euler'sche Turbinengleichung:

$$M_{12} = \dot{m}(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}) \quad (6.23)$$

mit c_u : Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung
 r : Hebelarm

Energiebilanz

$$\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + g z_2\right) - \left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + g z_1\right) = q_{12} \quad (6.24)$$

mit u : spez. innere Energie, [J/kg]

$q_{12} = \dot{Q}/\dot{m}$: zwischen Position 1 und 2 zugeführte spezifische Wärmemenge, [J/kg]

Interne Strömungen**Laminare Rohrströmung**

Geschwindigkeitsprofil:

$$c(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = c_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad (6.25)$$

mit Δp : Druckunterschied zwischen zwei im Abstand l auf den Stromfaden liegenden Punkten

l : Länge des Rohrabschnittes über dem der Druckunterschied Δp auftritt

Volumenstrom:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l} \quad (\text{Gesetz von Hagen-Poiseuille}) \quad (6.26)$$

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho c_m^2 \lambda \frac{l}{d} \quad (6.27)$$

mit c_m : über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

λ : Rohrreibungszahl

Die Rohrreibungszahl für laminare Strömungen ist

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (6.28)$$

mit der Reynolds-Zahl:

$$Re = \frac{c_m d}{\nu} \quad (6.29)$$

Turbulente Rohrströmung

Geschwindigkeitsprofil:

$$\frac{\bar{c}(r)}{\bar{c}_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}, \quad Re \leq 10^5 \quad (6.30)$$

Dieses 1/7-Potenzgesetz gilt nicht in Wandnähe.

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \bar{c}_m^2 \lambda \frac{l}{d} \quad (6.31)$$

mit \bar{c}_m : zeitliche und über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

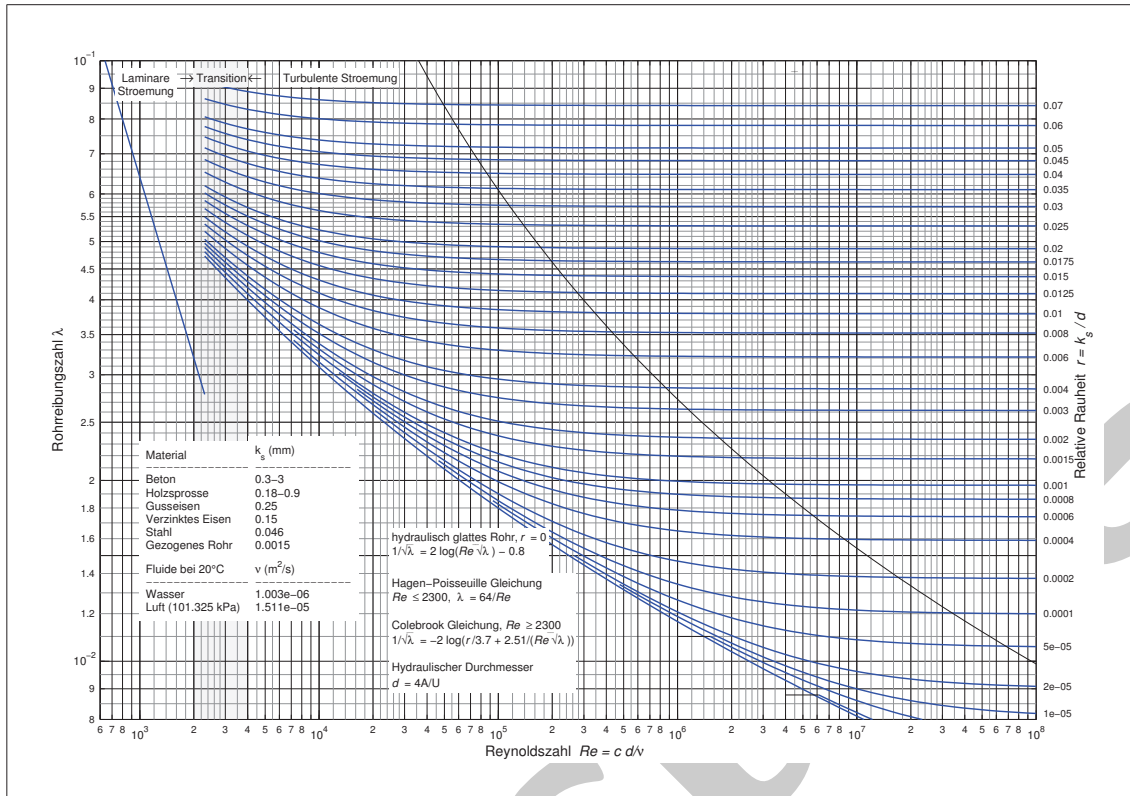
Die Rohrreibungszahl für hydraulisch glatte Rohre:

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} \quad \text{für } Re \leq 10^5 \quad (\text{Blasius}) \quad (6.32)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad \text{für } 10^5 \leq Re \leq 3 \cdot 10^6 \quad (\text{Prandtl}) \quad (6.33)$$

Moody-Diagramm

Das Moody-Diagramm stellt die Rohrreibungszahl λ in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re (laminare und turbulente Strömungen) und der äquivalenten Sandkornrauigkeit k_s für technisch raue Rohre dar.



Externe Strömungen

Grenzschicht an einer ebenen Platte

Grenzschichtdicke (laminar):

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}} \tag{6.34}$$

Reynoldszahl bezogen auf die Lauflänge:

$$Re_x = \frac{c_\infty x}{\nu} \tag{6.35}$$

mit c_∞ : Anströmgeschwindigkeit parallel zur Plattenoberfläche

x : überströmte Länge, Beginn: Plattenvorderkante

Laminar-turbulenter Umschlag:

$$Re_{x_{krit}} = \frac{c_\infty x_{krit}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5 \tag{6.36}$$

Strömungswiderstand

Gesamtwiderstand

$$F_W = F_{w,\tau} + F_{w,p} = c_w \frac{\rho}{2} c_\infty^2 A \tag{6.37}$$

mit $F_{w,\tau}$: Widerstandskraft infolge der Reibung
 $F_{w,p}$: Widerstandskraft infolge der Druckdifferenz
 c_w : Widerstandskoeffizient
 A : angeströmte oder umströmte Fläche

Reibungswiderstand einer ebenen Platte:

$$c_{w,\tau} = \begin{cases} \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}} & \text{lam. Grenzschicht} \\ \frac{0,074}{Re_l^{1/5}} & \text{turb. Grenzschicht} \end{cases} \quad (6.38)$$

mit $Re_l : \frac{c_\infty l}{\nu}$

Ausströmvorgänge

Ausströmgeschwindigkeit für *inkompressibles* Fluid ($c_{innen} = c_0 = 0$):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p_{aus}) + 2gh} \quad (6.39)$$

Ausströmgeschwindigkeit für *kompressibles* Fluid ($c_{in} = 0$):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_0 \left(1 - \left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} \quad (6.40)$$

Massenstrom:

$$\dot{m} = A_{aus} c_{aus} \rho_{aus} = A_{aus} \sqrt{2p_0 \rho_0} \psi \quad (6.41)$$

mit Ausflußfunktion:

$$\psi = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right)} \quad (6.42)$$

Kritisches Druckverhältnis:

$$\left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^* = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (6.43)$$

Gasdynamik

Thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad ; \quad \text{mit } R : \text{Gaskonstante, [J/(kg K)] und } T : \text{Temperatur, [K]} \quad (6.44)$$

Isentropenbeziehung:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \quad ; \quad \text{mit } \kappa = \frac{c_p}{c_v} : \text{Isentropenexponent} \quad (6.45)$$

$$R = c_p - c_v = \frac{\kappa-1}{\kappa} c_p \quad (6.46)$$

Spezifische Enthalpie:

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad \text{mit } u : \text{ spez. innere Energie, [J/kg]} \quad (6.47)$$

Schallgeschwindigkeit:

$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad (6.48)$$

Mach-Zahl:

$$Ma = c/a \quad (6.49)$$

Zustandsänderung aus dem Ruhezustand (X_0) für ein ideales Gas bei isentroper, verlustfreier, stationärer Strömung:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \quad (6.50)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.51)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.52)$$

Zustandsänderung für den kritischen Zustand (X^*) eines idealen Gas in einer isentropen, verlustfreien, stationären Strömung:

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (6.53)$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.54)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.55)$$

Für die Strömungen zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 auf dem Stromfaden gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right) \quad (6.56)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.57)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.58)$$