

Klausur

Strömungsmechanik 1

Herbst 2016

16. August 2016, Beginn 16:00 Uhr

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- Mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

Weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Aufgabe	Punkte
1. Verständnisfragen	8
2. Inkompressible Strömungen	38
3. Kompressible Strömungen	16
Gesamt	62

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

**Prof. Dr.-Ing. J. Seume
C. Hamann, T. Hauptmann**

1. Verständnisfragen (8 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.
(Nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet.)

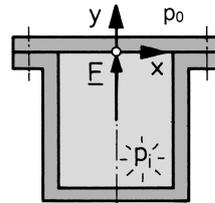
Druckbehälter

(2)

Ein Druckgefäß ist mit einem ebenen Deckel der Fläche A verschlossen und mit einer unter dem gleichmäßigen Innendruck p_i stehenden Flüssigkeit vollständig gefüllt. Der äußere Luftdruck ist p_0 . Berechnen Sie die auf die Flansche wirkende Kraft F . Das System wird durch die folgenden Größen

$$p_0 = 100\,000\text{ Pa} \quad p_i = 225\,000\text{ Pa}$$

$$A = 0.07\text{ m}^2$$



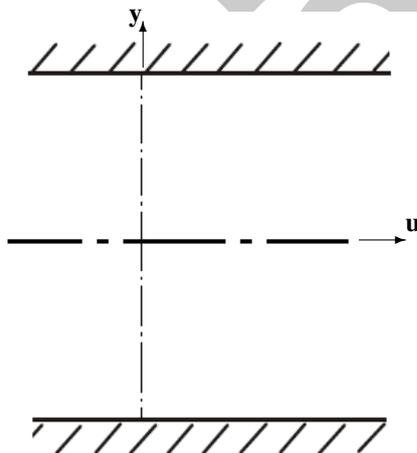
beschrieben. Welche Aussagen sind richtig?

- $F=7875\text{ Nm}$
- $F=15750\text{ N}$
- $F=8750\text{ N}$
- $F=7875\text{ N}$
- Der Druck in einem Fluid wirkt stets in alle Richtungen

Rohrströmung

(2)

Zeichnen und benennen Sie ein laminares sowie ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil, ungefähr gleichen Volumenstroms, übereinander in den gegebenen Rohrquerschnitt.



Wasserkanal

(1)

In einem Wasserkanal (Abb. 1) fließt Wasser ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) mit einer mittleren Geschwindigkeit von $c_m = 0.45 \text{ m/s}$ durch eine rechteckige Messstrecke (Breite=50 cm). Der Wasserstand in der Messstrecke beträgt 50 cm. Am Ende der Messstrecke wird die Strömung um 180° umgelenkt und durch ein Rohr mit dem Innendurchmesser $d_i = 30 \text{ cm}$ zurückgeführt. Wie hoch ist die mittlere Geschwindigkeit c_m im Rohr. Die Strömung ist als verlustfrei anzusehen.

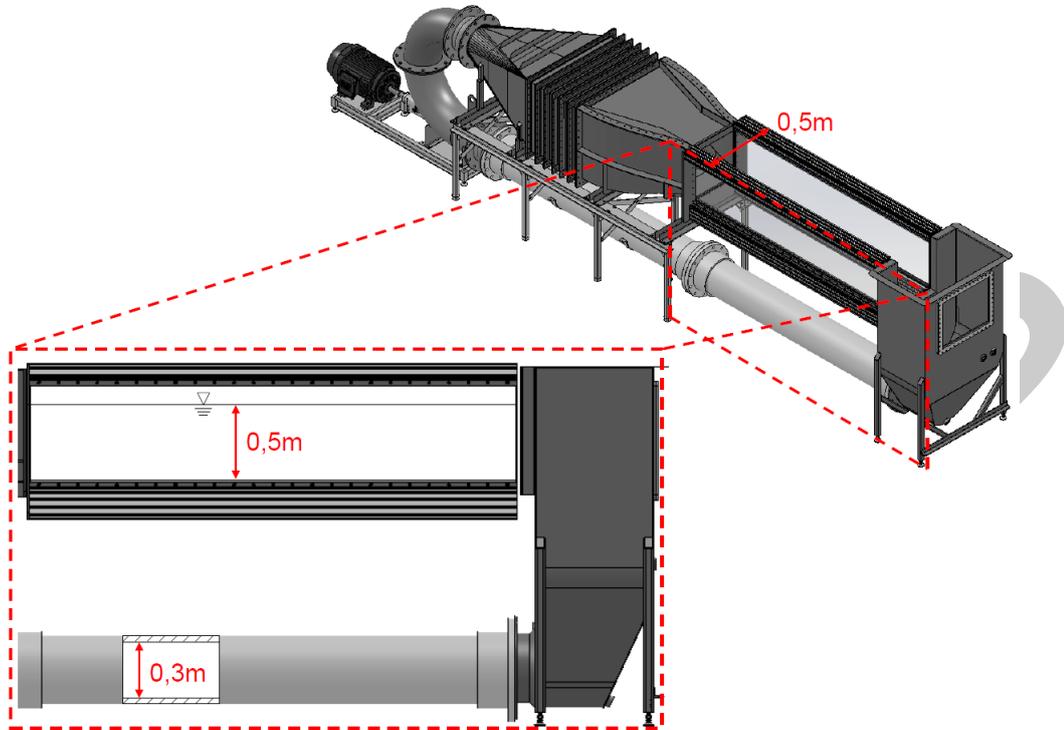


Abb. 1 Wasserkanal

- 1.59 m/s
- 0.8 m/s
- 2.12 m/s
- 1.2 m/s
- 3.24 m/s

Rohrströmung

(1)

Wie muss man den Durchmesser einer Rohrleitung ändern, damit die zunächst turbulente Rohrströmung bei gleichem Volumenstrom laminar wird?

- Rohrdurchmesser verkleinern
- Die Änderung des Rohrdurchmessers hat keinen Einfluss
- Rohrdurchmesser vergrößern

Moody-Diagramm

(1)

Welche der Aussagen stimmen für eine Rohrströmung mit

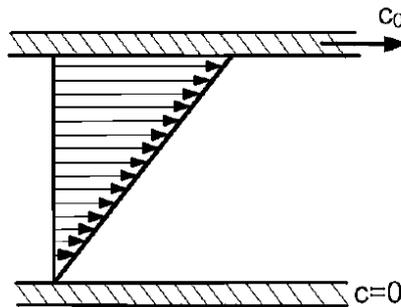
Mittlere Geschwindigkeit $\bar{c}_m = 120 \text{ m/s}$; Radius $r = 10 \text{ mm}$; Kinematische Viskosität $\nu = 1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$;
Sandkornrauheit $k_s = 1.6 \times 10^{-4} \text{ m}$

- Die Strömung ist laminar.
- Die Strömung ist turbulent.
- Das Rohr ist als hydraulisch glatt anzusehen.
- Das Rohr ist als hydraulisch rau anzusehen.

Haftbedingung

(1)

Was bedeutet Haftbedingung?



- Die Geschwindigkeit an der Wand ist 0.
- Die mittlere Geschwindigkeit der Strömung ist gleich der Geschwindigkeit an der Wand.
- Der Geschwindigkeitsgradient an der Wand ist gleich 0.

2. Inkompressible Strömungen

2.1. Eigenwasserversorgungsanlage (26 Punkte)



Eine Eigenwasserversorgungsanlage besteht aus einem Reservoir, einer Pumpe und einem Druckbehälter. Das Wasser wird dem Reservoir von einem Druckbehälter über eine Zuleitung R_1 (Länge L_1) zugeführt. Über eine Rückleitung R_2 (Länge L_2) wird das Wasser mit Hilfe einer Pumpe P wieder zurück zum Druckbehälter gepumpt. Die Pegelstände im Druckbehälter und im Reservoir bleiben somit konstant. Am Ende der Zuleitung R_1 wird über eine Düse (Durchmesser d_D) eine Fontäne mit einer Steighöhe h_S erzeugt.

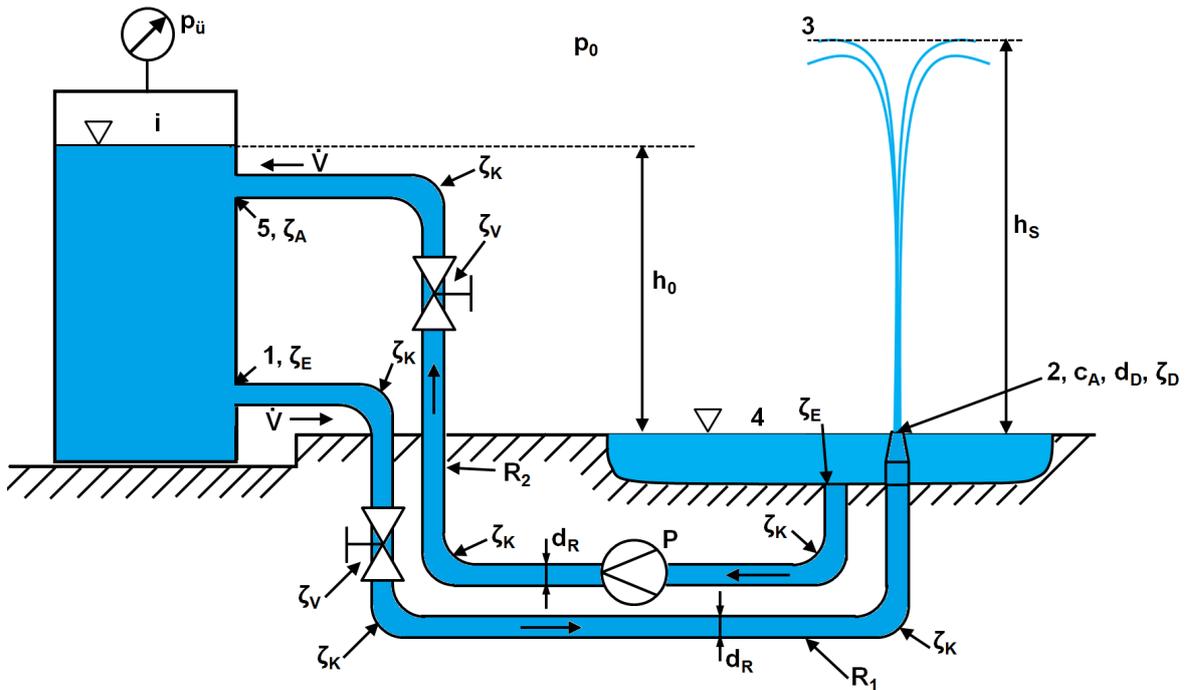


Abb. 2 Eigenwasserversorgungsanlage

Gegeben:

- $d_D = 20 \text{ mm}$
- $L_1 = 10 \text{ m}$
- $d_R = 50 \text{ mm}$
- $\zeta_E = 0,5$
- $\zeta_A = 0,5$
- $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

- $h_S = 4 \text{ m}$
- $L_2 = 10 \text{ m}$
- $p_0 = 1 \text{ bar}$
- $\zeta_K = 0,6$
- $\zeta_D = 0,03$

- $h_0 = 2 \text{ m}$
- $k_s = 0,25 \text{ mm}$
- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- $\zeta_V = 4,0$
- $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

2.1a)

Berechnen Sie die Austrittsgeschwindigkeit c_A an der Düse des Reservoirs am Ende der Zuleitung R_1 .
Hinweis: Der Luftwiderstand kann vernachlässigt werden.

	Wert
c_A	8.86 ms 0.5

2.1b)

Berechnen Sie den Überdruck p im Druckbehälter.

	Wert
$p_{\text{ü}}$	33 566 Pa 0.5

2.1c)

Berechnen Sie die spezifische Förderarbeit der Pumpe.

Hinweis: Die Rückleitung R_2 kann als hydraulisch glattes Rohr angenommen werden.

	Wert
$\frac{\dot{W}}{V}$	64 044 Pa 0.5

2.1d)

Berechnen Sie den Stromverbrauch W_{el} in kWh pro Tag bei einem Gesamtwirkungsgrad der Pumpe von $\eta_{ges} = 0,55$.

	Wert
W_{el}	7.781 kWh 0.5

Lösung

2.1a)

Aufstellen der verlustfreien Bernoulli Gleichung von Punkt 2 (Austritt der Düse) nach Punkt 3 (Scheitelpunkt):

$$\rho \frac{c_2^2}{2} + p_2 + g \cdot \rho \cdot z_2 = \rho \frac{c_3^2}{2} + p_3 + g \cdot \rho \cdot z_3 \quad \text{1a} \quad (1)$$

Mit den Annahmen

$$z_2 = 0 \quad z_3 = h_S \quad c_3 = 0 \quad c_2 = c_A \quad p_2 = p_3 = p_0 \quad \text{2b} \quad (2)$$

$$\rho \frac{c_A^2}{2} = g \cdot \rho \cdot h_S \quad (3)$$

Die Austrittsgeschwindigkeit der Düse c_A ergibt sich somit aus

$$c_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_S} \quad \text{1c} \quad (4)$$

2.1b)

Berechnung der Geschwindigkeit in der Zuleitung R_1 über Konti.

$$c_1 \cdot A_1 = c_A \cdot A_D \quad (5)$$

$$c_1 = c_A \cdot \frac{A_D}{A_1} = c_A \cdot \left(\frac{d_D}{d_R}\right)^2 = 1.418 \text{ ms} \quad (6) \quad \text{1d}$$

Reynoldszahl in der Zuleitung R_1 :

$$Re_d = \frac{c_1 \cdot d_R}{\nu} = 70900 \quad (7) \quad \text{1e}$$

Relative Rauigkeit

$$\frac{k}{d_R} = 0,005 \quad (8) \quad \text{0,5f}$$

Rohrreibungszahl $\lambda = 0,032$ aus Moody Diagramm.

Druckverlust in der Zuleitung

$$\Delta p_{V,zu} = \sum_k \frac{1}{2} \rho c_k^2 \lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2} \rho c_i^2 \zeta_i \quad (9)$$

$$\Delta p_{V,zu} = \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \left(\lambda \frac{L}{d_R} + \zeta_E + \zeta_V + 3 \cdot \zeta_K \right) + \frac{\rho}{2} \cdot c_A^2 \cdot \zeta_D \quad (10) \quad \text{2,5g}$$

$$\Delta p_{V,zu} = 13946 \text{ Pa} \quad (11)$$

Überdruck im Behälter: Bernoulli-Gleichung von (i) - (3) unter Berücksichtigung der Reibung.

$$p_i + \frac{\rho}{2} \cdot c_i^2 + \rho \cdot g \cdot z_i + \frac{\dot{W}_{i3}}{\dot{V}} = p_3 + \frac{\rho}{2} \cdot c_3^2 + \rho \cdot g \cdot z_3 + \Delta p_{V,zu} \quad (12) \quad \text{1h}$$

Mit

$$p_i = p_{\ddot{u}} + p_0 \quad p_3 = p_0 \quad c_i = 0 \quad c_3 = 0 \quad z_i = h_0 \quad z_3 = h_S \quad \dot{W}_{i3} = 0 \quad (13) \quad \text{3,5i}$$

$$p_{\ddot{u}} + p_0 + \rho \cdot g \cdot h_0 = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_S + \Delta p_{V,zu} \quad (14)$$

$$p_{\ddot{u}} = \rho \cdot g \cdot (h_S - h_0) + \Delta p_{V,zu} \quad (15) \quad \text{1j}$$

2.1c)

Die Berechnung der spezifischen Förderarbeit der Pumpe erfolgt über die erweiterte Bernoulli-Gleichung von 4 nach i

$$p_4 + \frac{\rho}{2} \cdot c_4^2 + \rho \cdot g \cdot z_4 + \frac{\dot{W}_{4i}}{\dot{V}} = p_i + \frac{\rho}{2} \cdot c_i^2 + \rho \cdot g \cdot z_4 + \Delta p_{V,Rück} \quad (16) \quad \text{1k}$$

Mit gleichem Rohrquerschnitt und

$$\dot{V}_{Zu} = \dot{V}_{Rück} = \dot{V} \quad (17) \quad \text{0,5l}$$

erfolgt

$$c_5 = c_1 = 1.418 \text{ ms} \quad (18)$$

Die Rückleitung wird als hydraulisch glattes Rohr angenommen, daher muss ein neues λ bestimmt werden.

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} = 0,02 \quad (1\text{ml}) \quad (19)$$

Druckverlust in der Rückleitung über:

$$\Delta p_{V,Rueck} = \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 \left(\lambda \frac{L}{d_R} + \zeta_E + \zeta_V + \zeta_A + 3 \cdot \zeta_K \right) \quad (2,5\text{m}) \quad (20)$$

$$\Delta p_{V,Rueck} = 10858 \text{ pascal} \quad (21)$$

Annahmen:

$$p_i = p_{\ddot{u}} + p_0 \quad p_4 = p_0 \quad c_i = 0 \quad c_4 = 0 \quad z_i = h_0 \quad z_4 = 0 \quad (2\text{n}) \quad (22)$$

$$p_0 + \frac{\dot{W}_{4i}}{V} = p_{\ddot{u}} + p_0 + \rho \cdot g \cdot h_0 + \Delta p_{V,Rueck} \quad (1\text{o}) \quad (23)$$

$$\frac{\dot{W}_{4i}}{V} = \rho \cdot g \cdot h_0 + \Delta p_{V,Rueck} + p_{\ddot{u}} = 64044 \text{ Pa} \quad (24)$$

2.1d)

Die theoretisch bzw. hydraulische Leistung der Pumpe $P_{hyd} = P_{theor.}$ erfolgt nach

$$P_{hyd} = \dot{m} \cdot \frac{\dot{W}_{4i}}{V \cdot \rho} = \rho \cdot c_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_R^2 \cdot \frac{\dot{W}_{4i}}{V \cdot \rho} \quad (1\text{p}) \quad (25)$$

$$P_{hyd} = 178.3 \text{ W} \quad (26)$$

$$W_{el} = P_{el} \cdot t = \frac{P_{hyd}}{\eta_{ges}} \cdot t = 7.781 \text{ kWh} \quad (0,5\text{q}) \quad (27)$$



2.2. Werkzeugschneide (12 Punkte)

Aus einer Düse tritt ein Strahl Kühlschmiermittel mit konstanter Dichte ρ und der Geschwindigkeit c_1 aus und trifft auf eine Werkzeugschneide (vgl. Skizze). Diese teilt den Kühlschmiermittelstrahl in zwei unterschiedlich große Strahlen (s. Zeichnung). Es kann eine ebene und verlustfreie Strömung angenommen werden.

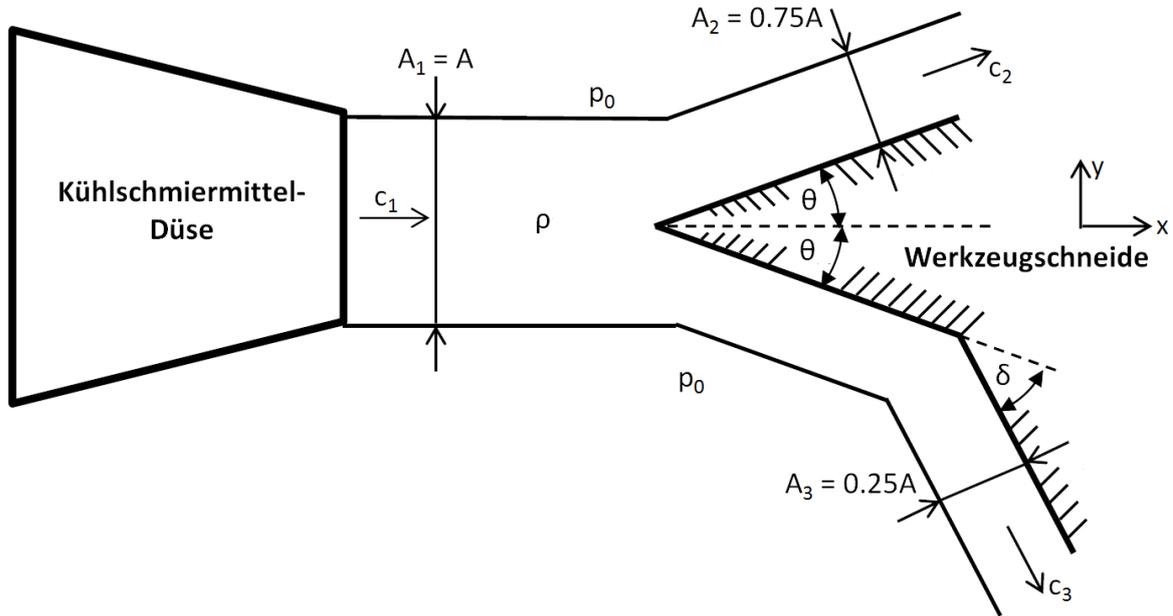


Abb. 3 Werkzeugschneide

Gegeben:

A c_1 p_0
 ρ θ δ

Hinweis: Volumenkräfte und Reibung sind vernachlässigbar, auf die Werkzeugschneide wirkt von allen Seiten der Umgebungsdruck p_0 .

2.2a)

Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten c_2 und c_3 .

	Symbolschreibweise
c_2	c_1 0.5
c_3	c_1 0.5

2.2b)

Bestimmen Sie die Komponenten F_x und F_y des Kraftvektors F entsprechend des gegebenen Koordinatensystems, die vom Kühlschmiermittelstrahl auf die Werkzeugschneide ausgeübt wird.

	Symbolschreibweise
F_x	$A \cdot \frac{\rho \cdot c_1^2}{4} (3 \cdot \cos \theta + \cos(\theta + \delta) - 4)$ 0.5

	Symbolschreibweise
F_y	$A \cdot \frac{\rho \cdot c_1^2}{4} (3 \cdot \sin \theta - \sin(\theta + \delta))$ 0.5

Lösung

2.2 a)

Aufstellen der verlustfreien Bernoulli Gleichung von Punkt 1 (Austritt der Düse) nach Punkt 2 bzw. 3:

$$\rho \frac{c_1^2}{2} + p_1 + g \cdot \rho \cdot z_1 = \rho \frac{c_2^2}{2} + p_2 + g \cdot \rho \cdot z_2 = \rho \frac{c_3^2}{2} + p_3 + g \cdot \rho \cdot z_3 \quad \text{1a} \quad (28)$$

Mit den Annahmen

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0 \quad p_2 = p_3 = p_0 \quad \text{1b} \quad (29)$$

$$c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 \quad (30)$$

$$c_1 = c_2 = c_3 \quad (31)$$

2.2 b)

Aufstellen der Kräftebilanz in x-Richtung.

Annahme: Druckkräfte heben sich den Bilanzierungsraum auf.

$$F_{I1} + F_{I2} + F_{I3} + F_{P1} + F_{P2} + F_{P3} + F_X = 0 \quad (32)$$

$$\dot{m} \cdot c_1 - \dot{m} \cdot c_2 \cdot \cos \theta - \dot{m} \cdot c_3 \cdot \cos(\theta + \delta) + F_X = 0 \quad \text{3c} \quad (33)$$

Anmerkung: 1 Punkt für das Aufstellen der korrekten Gleichung mit richtigen Vorzeichen. 4 x 0.5 Punkte für das Aufstellen der richtigen Terme

$$\rho \cdot A \cdot c_1^2 - 0.75 \cdot \rho \cdot A \cdot c_2^2 \cdot \cos \theta - 0.25 \cdot \rho \cdot A \cdot c_3^2 \cdot \cos(\theta + \delta) + F_X = 0 \quad \text{1d} \quad (34)$$

$$F_X = A \cdot \frac{\rho \cdot c_1^2}{4} (3 \cdot \cos \theta + \cos(\theta + \delta) - 4) \quad (35)$$

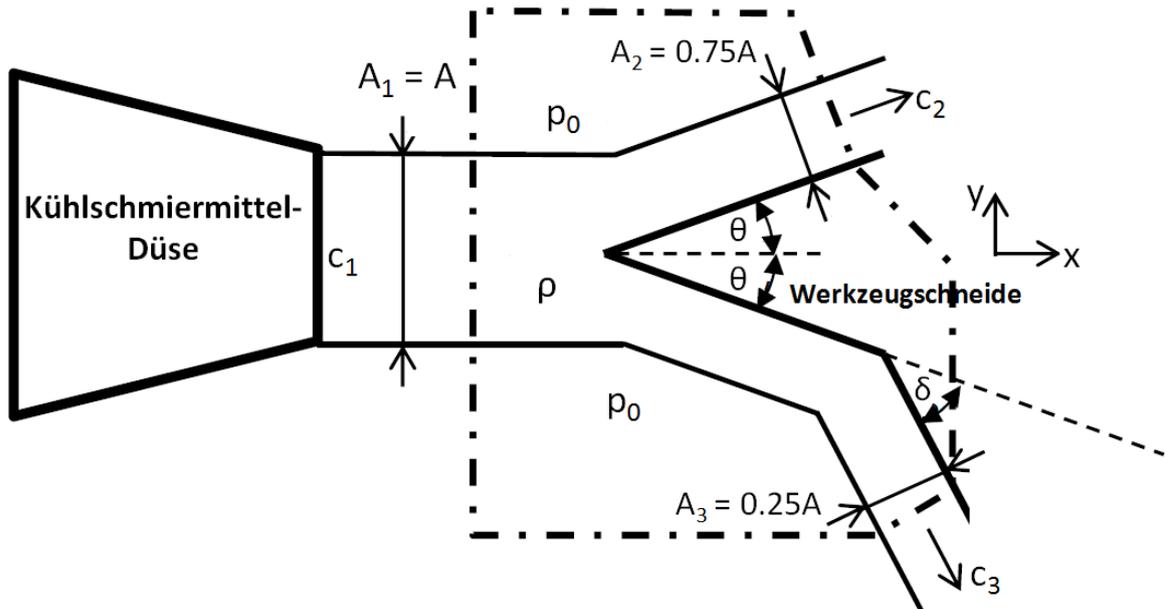


Abb. 4 Werkzeugschneide Freikörperbild

Aufstellen der Kräftebilanz in y-Richtung.

Annahme: Druckkräfte heben sich den Bilanzierungsraum auf.

$$F_{I1} + F_{I2} + F_{I3} + F_{P1} + F_{P2} + F_{P3} + F_Y = 0 \quad (36)$$

$$\dot{m} \cdot c_2 \cdot \sin \theta - \dot{m} \cdot c_3 \cdot \sin(\theta + \delta) - F_Y = 0 \quad (3e) \quad (37)$$

Anmerkung: 1 Punkt für das Aufstellen der korrekten Gleichung mit richtigen Vorzeichen. 4 x 0.5 Punkte für das Aufstellen der richtigen Terme

$$0.75 \cdot \rho \cdot A \cdot c_2^2 \cdot \sin \theta - 0.25 \cdot \rho \cdot A \cdot c_3^2 \cdot \sin(\theta + \delta) - F_Y = 0 \quad (1f) \quad (38)$$

$$F_Y = A \cdot \frac{\rho \cdot c_1^2}{4} (3 \cdot \sin \theta - \sin(\theta + \delta)) \quad (39)$$

3. Kompressible Strömungen

3.1. Ausströmen aus einem Druckbehälter (16 Punkte)



An einem Druckbehälter, in dem sich Luft unter einem Druck von $p_0 = 4 \text{ bar}$ und einer Temperatur von $T_0 = 300 \text{ K}$ befindet, ist eine ideal angepasste Laval-Düse angeschlossen. Am engsten Querschnitt beträgt der Durchmesser $D_1 = 0.04 \text{ m}$. Der Umgebungsdruck beträgt $p_2 = 1 \text{ bar}$. $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ und $\kappa = 1.4$

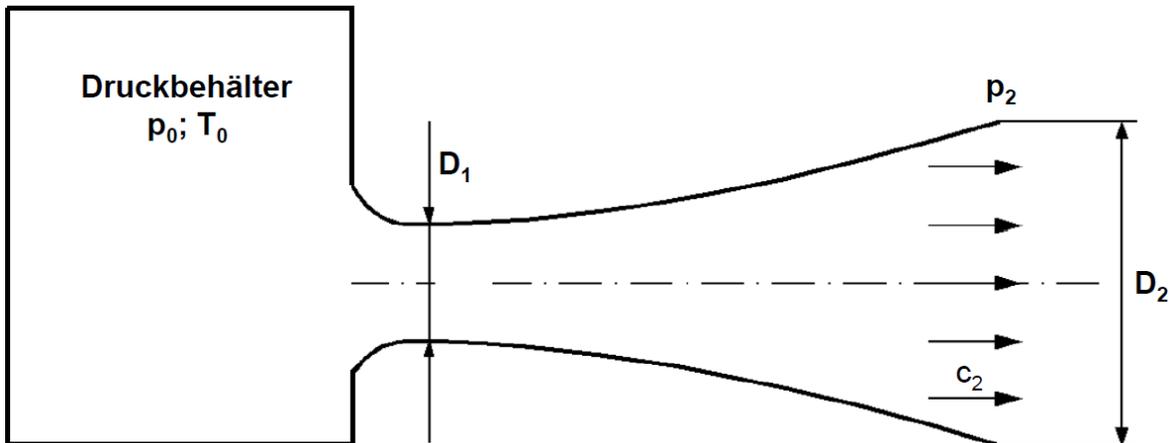


Abb. 5 Druckbehälter mit ideal angepasster Lavaldüse

3.1a)

Bestimmen Sie das kritische Druckverhältnis. Ist das Druckverhältnis unter- oder überkritisch?

	Symbolschreibweise	Wert
$\frac{p_2}{p_0}$	überkritisch ①	$0,25 < 0,582$ ①

3.1b)

Berechnen Sie die Geschwindigkeit c_2 am Austritt der Lavaldüse.

	Symbolschreibweise	Wert
c_2	$\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right] \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}}$ ①	443.7 m/s ①

3.1c)

Berechnen Sie die Temperatur T_2 am Austritt der Lavaldüse.

	Symbolschreibweise	Wert
T_2	$T_0 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{c_2^2}{\kappa R}$ ①	202 K 0.5

3.1d)

Berechnen Sie die Dichte ρ_2 am Austritt der Lavaldüse.

	Symbolschreibweise	Wert
ρ_2	$\frac{p_2}{RT_2}$ ①	1.725 kg/m ³ 0.5

3.1e)

Berechnen Sie den Massenstrom \dot{m} der Luft in $\frac{kg}{s}$ durch die Düse.

	Symbolschreibweise	Wert
\dot{m}	$\frac{D_1^2 \pi}{4} \frac{p_1}{RT_1} \sqrt{\kappa RT_1}$ ①	1.176 kg/s 0.5

3.1f)

Berechnen Sie den Durchmesser D_2 am Düsenaustritt.

	Symbolschreibweise	Wert
D_2	$\sqrt{\frac{4\dot{m}}{\rho_2 \pi c_2}}$ ①	0.044 m 0.5

Lösung

3.1a)

Bestimmen des kritischen Druckverhältnisses:

$$\left(\frac{p_A}{p_I}\right)^* = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0,582 \quad (40)$$

Vorliegendes Druckverhältnis:

$$\left(\frac{p_2}{p_0}\right) = \frac{1}{4} = 0,25 \quad (41)$$

Es liegt eine überkritische Strömung vor → im engsten Querschnitt gilt $Ma = 1$.

3.1b)

Bestimmen der Geschwindigkeit am Austritt über Gleichung in der Formelsammlung auf Seite 6:

$$\frac{p_2}{p_0} = \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{\rho_0}{p_0} (c_2^2 - c_0^2)\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (1a) \quad (42)$$

mit

$$c_0 = 0 \quad (0.5b) \quad (43)$$

$$c_2 = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right] \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}} \quad (44)$$

$$c_2 = 443,70 \frac{m}{s} \quad (45)$$

3.1c)

Bestimmung der Temperatur am Austritt über:

$$\frac{T_0}{T_2} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2 \quad (1c) \quad (46)$$

mit

$$Ma = \frac{c}{a} \quad (47)$$

und

$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad (0.5d) \quad (48)$$

Einsetzen und nach T_2 auflösen führt auf:

$$T_2 = T_0 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{c_2^2}{\kappa R} = 202 \text{ K} \quad (49)$$

3.1d)

Bestimmung der Dichte am Austritt der Lavaldüse nach dem idealen Gasgesetz:

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R \cdot T_2} = 1,725 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (0.5e) \quad (50)$$

3.1e)

Bestimmung des Massenstroms am engsten Querschnitt der Lavaldüse (Index 1)

$$\dot{m} = A_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1 \quad (51)$$

Bestimmung der Temperatur am engsten Querschnitt (Index 1)

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (0.5f) \quad (52)$$

Umgeformt

$$T_1 = \frac{2 \cdot T_0}{\kappa + 1} = 250 \text{ K} \quad (53)$$

Bestimmung des Druckes am engsten Querschnitt (Index 1)

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (1g) \quad (54)$$

Umgeformt

$$p_1 = \frac{p_0}{\left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} = 211\,312.72 \text{ Pa} \quad (55)$$

Bestimmung der Geschwindigkeit am engsten Querschnitt (Index 1)
Ma = 1 am engsten Querschnitt

$$\Rightarrow c_1 = \sqrt{\kappa R T_1} = 317 \text{ m/s} \quad (1h) \quad (56)$$

Damit ergibt sich für den Massenstrom \dot{m}

$$\dot{m} = \frac{D_1^2 \pi}{4} \frac{p_1}{R T_1} \sqrt{\kappa R T_1} = 1.176 \text{ kg/s} \quad (57)$$

3.1f)

Der Massenstrom \dot{m} liegt auch am Austritt der Lavaldüse vor

$$\dot{m} = A_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2 = \frac{D_2^2}{4} \cdot \pi \cdot \rho_2 \cdot c_2 \quad (1i) \quad (58)$$

Umgeformt

$$D_2 = \sqrt{\frac{4 \dot{m}}{\rho_2 \pi c_2}} = 0.044 \text{ m} \quad (59)$$

Formelsammlung

Viskosität

$$\eta = \nu \rho \quad (6.11)$$

mit η : dynamische Viskosität, [Ns/m²]

ν : kinematische Viskosität, [m²/s]

ρ : Dichte, [kg/m³]

Newtonsches Fluid:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (6.12)$$

mit τ : Scherspannung, [N/m²]

u : Strömungsgeschwindigkeit, [m/s]

y : Koordinate senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit, [m]

Oberflächenspannung und Kapillarität

Drucksprung Δp in der Phasengrenzfläche eines kugelförmigen Tropfens mit dem Radius r :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad ; \quad \text{mit } \sigma : \text{Oberflächenspannung, [N/m]} \quad (6.13)$$

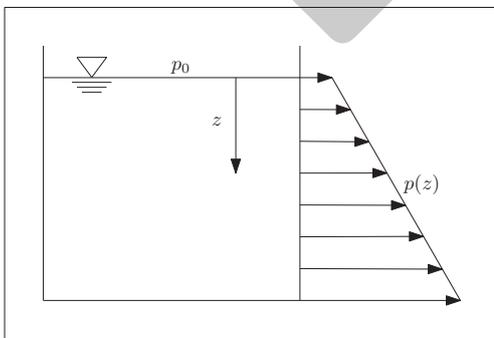
Steighöhe h bei Kapillaren mit kreisförmigem Querschnitt:

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r} \quad ; \quad \text{mit } \alpha : \text{Randwinkel} \quad (6.14)$$

Hydrostatik

Hydrostatischer Druck:

$$p(z) = p_0 + \rho g z \quad (6.15)$$



Hydrostatischer Auftrieb:

$$F_A = \rho g V \quad ; \quad \text{mit } V : \text{Volumen der verdrängten Flüssigkeit} \quad (6.16)$$

Hydrodynamik

Massenbilanz

$$\frac{dm_{KV}}{dt} = \iiint \rho \vec{n} \cdot \vec{c} \, dA \quad (6.17)$$

mit \vec{n} : Normalvektor
 KV : beliebiges Kontrollvolumen

Impulssatz

$$\iint \rho \vec{c} \vec{n} \cdot \vec{c} \, dA = - \iint p \vec{n} \, dA + \iiint \rho \vec{g} \, dV + \vec{F}_R + \vec{F}_{12} \quad (6.18)$$

mit \vec{F}_R : Reibungskraft
 \vec{F}_{12} : Haltekraft/Interaktion mit Wänden

Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2} \rho c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad (6.19)$$

Erweiterung für verlustbehaftete Strömungen mit Energiezufuhr:

$$\frac{1}{2} \rho c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 + \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{V}} = \frac{1}{2} \rho c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{12} \quad (6.20)$$

mit $\dot{W}_{12} > 0$: zwischen Position 1 und 2 zugeführte Leistung, [Nms⁻¹]
 \dot{V} : Volumenstrom, [m³/s]
 Δp_{12} : Druckverlust zwischen Position 1 und 2, [Pa]

Druckverlust in Rohrströmungen:

$$\Delta p_{12} = \sum_k \frac{1}{2} \rho c_k^2 \lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2} \rho c_i^2 \xi_i \quad (6.21)$$

mit λ_k : Rohrreibungszahl
 l_k : Länge des Rohrabschnitts k
 d_k : Durchmesser des Rohrabschnitts k
 ξ_i : weitere Verlustbeiwerte des Rohrabschnitts i

Impulsmomentensatz

$$(\rho_2 c_2^2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2} + p_2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2}) - (\rho_1 c_1^2 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1} + p_1 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1}) = \sum \vec{M}_{12} \quad (6.22)$$

mit $\sum \vec{M}_{12}$: Summe der äußeren, an der Oberfläche der Kontrollraumes angreifenden Momente
 \vec{e}_t : Einheitsvektor, in Strömungsrichtung zeigend

Euler'sche Turbinengleichung:

$$M_{12} = \dot{m}(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}) \quad (6.23)$$

mit c_u : Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung
 r : Hebelarm

Energiebilanz

$$\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + g z_2\right) - \left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + g z_1\right) = q_{12} \quad (6.24)$$

mit u : spez. innere Energie, [J/kg]

$q_{12} = \dot{Q}/\dot{m}$: zwischen Position 1 und 2 zugeführte spezifische Wärmemenge, [J/kg]

Interne Strömungen**Laminare Rohrströmung**

Geschwindigkeitsprofil:

$$c(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = c_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad (6.25)$$

mit Δp : Druckunterschied zwischen zwei im Abstand l auf den Stromfaden liegenden Punkten

l : Länge des Rohrabschnittes über dem der Druckunterschied Δp auftritt

Volumenstrom:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l} \quad (\text{Gesetz von Hagen-Poiseuille}) \quad (6.26)$$

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho c_m^2 \lambda \frac{l}{d} \quad (6.27)$$

mit c_m : über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

λ : Rohrreibungszahl

Die Rohrreibungszahl für laminare Strömungen ist

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (6.28)$$

mit der Reynolds-Zahl:

$$Re = \frac{c_m d}{\nu} \quad (6.29)$$

Turbulente Rohrströmung

Geschwindigkeitsprofil:

$$\frac{\bar{c}(r)}{\bar{c}_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}, \quad Re \leq 10^5 \quad (6.30)$$

Dieses 1/7-Potenzgesetz gilt nicht in Wandnähe.

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \bar{c}_m^2 \lambda \frac{l}{d} \quad (6.31)$$

mit \bar{c}_m : zeitliche und über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

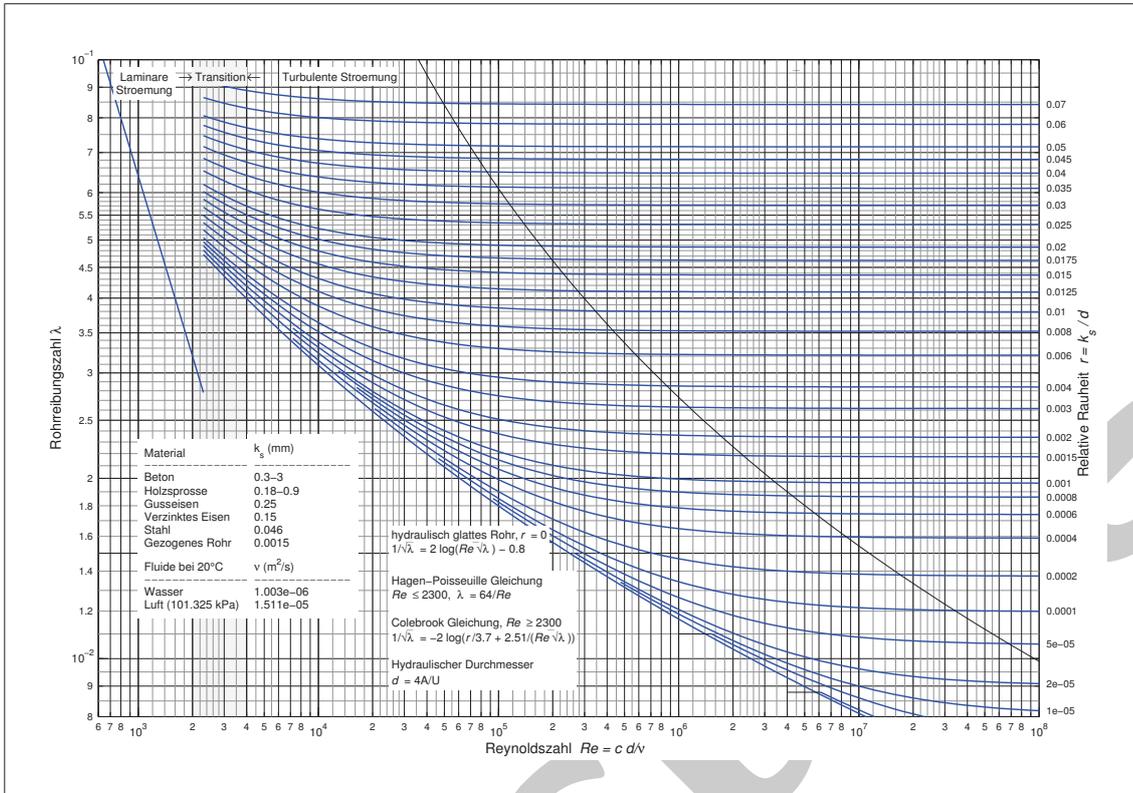
Die Rohrreibungszahl für hydraulisch glatte Rohre:

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} \quad \text{für } Re \leq 10^5 \quad (\text{Blasius}) \quad (6.32)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad \text{für } 10^5 \leq Re \leq 3 \cdot 10^6 \quad (\text{Prandtl}) \quad (6.33)$$

Moody-Diagramm

Das Moody-Diagramm stellt die Rohrreibungszahl λ in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re (laminare und turbulente Strömungen) und der äquivalenten Sandkornrauigkeit k_s für technisch raue Rohre dar.



Externe Strömungen

Grenzschicht an einer ebenen Platte

Grenzschichtdicke (laminar):

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}} \tag{6.34}$$

Reynoldszahl bezogen auf die Lauflänge:

$$Re_x = \frac{c_\infty x}{\nu} \tag{6.35}$$

mit c_∞ : Anströmgeschwindigkeit parallel zur Plattenoberfläche
 x : überströmte Länge, Beginn: Plattenvorderkante

Laminar-turbulenter Umschlag:

$$Re_{x_{krit}} = \frac{c_\infty x_{krit}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5 \tag{6.36}$$

Strömungswiderstand

Gesamtwiderstand

$$F_W = F_{w,\tau} + F_{w,p} = c_w \frac{\rho}{2} c_\infty^2 A \tag{6.37}$$

mit $F_{w,\tau}$: Widerstandskraft infolge der Reibung
 $F_{w,p}$: Widerstandskraft infolge der Druckdifferenz
 c_w : Widerstandskoeffizient
 A : angeströmte oder umströmte Fläche

Reibungswiderstand einer ebenen Platte:

$$c_{w,\tau} = \begin{cases} \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}} & \text{lam. Grenzschicht} \\ \frac{0,074}{Re_l^{1/5}} & \text{turb. Grenzschicht} \end{cases} \quad (6.38)$$

mit $Re_l : \frac{c_\infty l}{\nu}$

Ausströmvorgänge

Ausströmgeschwindigkeit für *inkompressibles* Fluid ($c_{innen} = c_0 = 0$):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p_{aus}) + 2gh} \quad (6.39)$$

Ausströmgeschwindigkeit für *kompressibles* Fluid ($c_{in} = 0$):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_0 \left(1 - \left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} \quad (6.40)$$

Massenstrom:

$$\dot{m} = A_{aus} c_{aus} \rho_{aus} = A_{aus} \sqrt{2p_0 \rho_0} \psi \quad (6.41)$$

mit Ausflußfunktion:

$$\psi = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right)} \quad (6.42)$$

Kritisches Druckverhältnis:

$$\left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^* = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (6.43)$$

Gasdynamik

Thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad ; \quad \text{mit } R : \text{Gaskonstante, [J/(kg K)] und } T : \text{Temperatur, [K]} \quad (6.44)$$

Isentropenbeziehung:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \quad ; \quad \text{mit } \kappa = \frac{c_p}{c_v} : \text{Isentropenexponent} \quad (6.45)$$

$$R = c_p - c_v = \frac{\kappa-1}{\kappa} c_p \quad (6.46)$$

Spezifische Enthalpie:

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad \text{mit } u : \text{ spez. innere Energie, [J/kg]} \quad (6.47)$$

Schallgeschwindigkeit:

$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad (6.48)$$

Mach-Zahl:

$$Ma = c/a \quad (6.49)$$

Zustandsänderung aus dem Ruhezustand (X_0) für ein ideales Gas bei isentroper, verlustfreier, stationärer Strömung:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \quad (6.50)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.51)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.52)$$

Zustandsänderung für den kritischen Zustand (X^*) eines idealen Gas in einer isentropen, verlustfreien, stationären Strömung:

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (6.53)$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.54)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.55)$$

Für die Strömungen zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 auf dem Stromfaden gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right) \quad (6.56)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.57)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.58)$$