Leibniz Universität Hannover

Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik

Klausur
Strömungsmechanik 1
Herbst 2017

15. August 2017, Beginn 16:00 Uhr

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- Mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

Weitere Hinweise:
Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Aufgabe	Punkte
1. Verständnisfragen	8
2. Inkompressible Strömungen	22
3. Kompressible Strömungen	16
Gesamt	46

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Prof. Dr.-Ing. J. Seume
T. Hauptmann, S. Lehnhoff

1. Verständnisfragen (8 Punkte)

Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.
(Nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet.)

Fluideigenschaften (1)

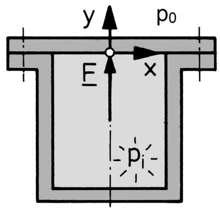
Der Druck in einem Fluid wirkt stets

- [ ] ...aufwärts.
- [ ] ...abwärts.
- [ ] ...in Strömungsrichtung.
- [x] ...in alle Richtungen.

Druckbehälter (2)

Ein Druckgefäß ist mit einem ebenen Deckel der Fläche A verschlossen und mit einer unter dem gleichmäßigen Innendruck p_i stehenden Flüssigkeit vollständig gefüllt. Der äußere Luftdruck ist p_0. Berechnen Sie die auf die Flansche wirkende Kraft F. Das System wird durch die folgenden Größen

$p_0 = 100\,000\,\mathrm{Pa}$ $\quad p_i = 225\,000\,\mathrm{Pa}$
$A = 0.07\,\mathrm{m}^2$

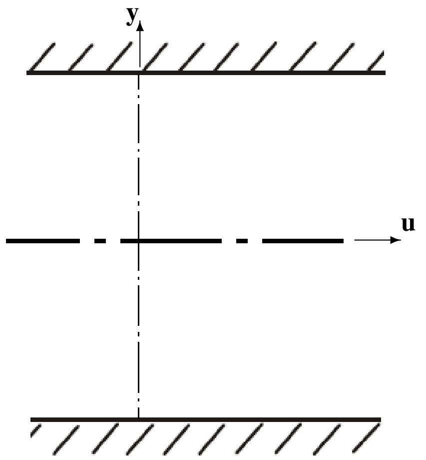


beschrieben. Welche Aussagen sind richtig?

- [ ] F=7875 N m
- [ ] F=15 750 N
- [x] F=8750 N
- [ ] F=7875 N
- [x] Der Druck in einem Fluid wirkt stets in alle Richtungen

Rohrströmung (2)

Zeichnen und benennen Sie ein laminares sowie ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil, ungefähr gleichen Volumenstroms, übereinander in den gegebenen Rohrquerschnitt.



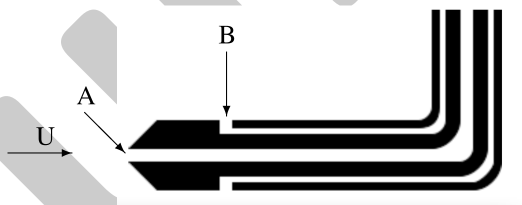
Prandtl-Sonde (1)

■ Die Geschwindigkeit an der Öffnung A ist 0.

■ An B wird der statische Druck gemessen.

□ B ist der Staupunkt der Sonde.

■ Dynamischer Druck = Druck A - Druck B



Rohrströmung (1)

Wie muss man den Durchmesser einer Rohrleitung ändern, damit die zunächst turbulente Rohrströmung bei gleichem Volumenstrom laminar wird?

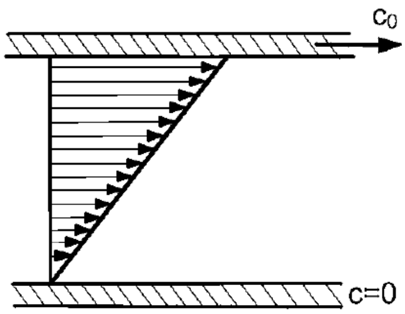
□ Rohrdurchmesser verkleinern

□ Die Änderung des Rohrdurchmessers hat keinen Einfluss

■ Rohrdurchmesser vergrößern

Haftbedingung **(1)**

Was bedeutet Haftbedingung?



- [x] Die Geschwindigkeit an der Wand ist 0.
- [ ] Die mittlere Geschwindigkeit der Strömung ist gleich der Geschwindigkeit an der Wand.
- [ ] Der Geschwindigkeitsgradient an der Wand ist gleich 0.

2. Inkompressible Strömungen

2.1. Abgestufte Rohrleitung (12 Punkte)

Aus einem sehr großen, gegen Atmosphäre offenen Becken fließt Wasser durch eine abgestufte Rohrleitung ins Freie. Die Querschnittsübergänge vom Becken zum Rohr und innerhalb des Rohres sind scharfkantig ausgeführt (ζ_{ein}, ζ_{uv}). Die Rohrleitung ist horizontal verlegt. Beim Ausströmvorgang kann die Flüssigkeitshöhe Z_0 als konstant angenommen werden. Die Strömung sei stationär und inkompressibel.

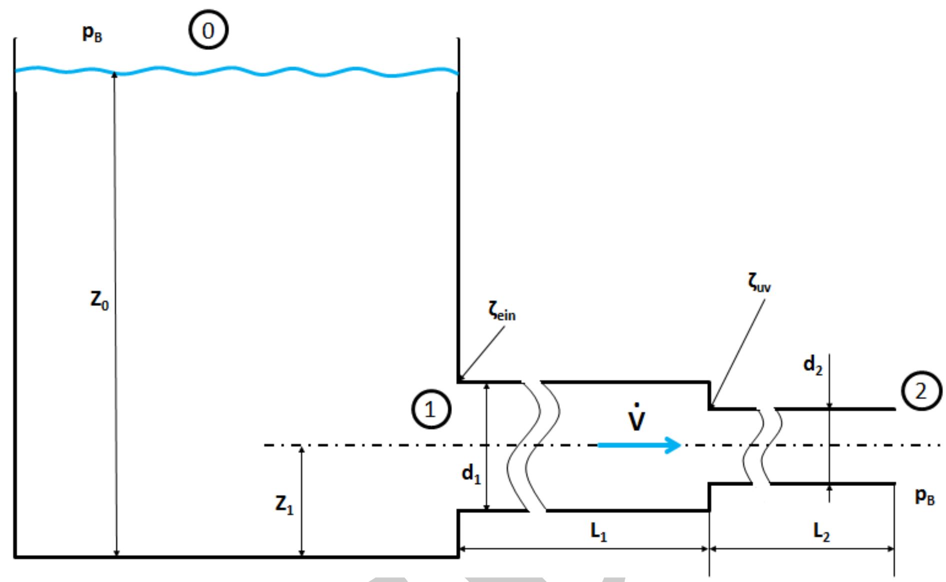


Abb. 1 Abgestufte Rohrleitung an offenem Becken

Gegeben:

$Z_0 = 15\,\mathrm{m}$	$Z_1 = 5\,\mathrm{m}$	$L_1 = 2\,\mathrm{m}$
$L_2 = 4\,\mathrm{m}$	$d_1 = 50\,\mathrm{mm}$	$d_2 = 25\,\mathrm{mm}$
$\lambda_1 = 0.025$	$\lambda_2 = 0.020$	
$\zeta_{ein} = 0.5$	$\zeta_{uv} = 0.36$	

2.1a)

Bestimmen Sie den verlustfreien Volumenstrom innerhalb des Rohres $\dot{V}_{theor}$.

	Symbolschreibweise	Wert	
$\dot{V}_{theor}$	$\frac{\pi}{4} \cdot d_2^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (Z_0 - Z_1)}$ 1	$0.006\,688\,\mathrm{m^3/s}$	1

2.1b)

Bestimmen Sie den verlustbehafteten Volumenstrom innerhalb des Rohres $\dot{V}$.

	Symbolschreibweise	Wert	
$\dot{V}$	$\frac{\pi}{4}\cdot d_2^2 \cdot \sqrt{\frac{2\cdot g\cdot(Z_0-Z_1)}{1+\lambda_2\cdot\frac{L_2}{d_2}+\zeta_{uv}+\frac{d_2^4}{d_1^4}\cdot(\lambda_1\cdot\frac{L_1}{d_1}+\zeta_{ein})}}$ 1	$0.003\,18\,\mathrm{m^3/s}$	1

Lösung

2.1a)

Aufstellen der Bernoulli-Gleichung ohne Verluste von 0 nach 2:

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{c_0^2}{2}+g\cdot Z_0=\frac{p_2}{\rho}+\frac{c_{2,theor}^2}{2}+g\cdot Z_1 \quad 0.5 \quad 0.5 \tag{1}$$

Aufstellen der Randbedingungen:

$$c_0=0 \quad 0.5 \tag{2}$$

$$p_0=p_2=p_B \quad 0.5 \tag{3}$$

$$c_{2,theor}=\sqrt{2\cdot g\cdot(Z_0-Z_1)} \quad 0.5 \tag{4}$$

Ermittlung des Volumenstromes:

$$\dot{V}=c\cdot A \tag{5}$$

$$\dot{V}_{theor}=c_{2,theor}\cdot A_2 \quad 0.5 \tag{6}$$

$$A_2=\frac{\pi}{4}\cdot d_2^2 \tag{7}$$

$$\dot{V}_{theor}=\frac{\pi}{4}\cdot d_2^2\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot(Z_0-Z_1)} \tag{8}$$

2.1b)

Aufstellen der Bernoulli-Gleichung mit Verlusten von 0 nach 2:

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{c_0^2}{2}+g\cdot Z_0=\frac{p_2}{\rho}+\frac{c_{2,theor}^2}{2}+g\cdot Z_1+\frac{\Delta p_{v,ges}}{\rho} \quad 0.5 \tag{9}$$

Ermittlung von c_2, analog zu Aufgabenteil 2.1a):

$$c_2=\sqrt{2\cdot\left(g\cdot(Z_0-Z_1)-\frac{\Delta p_{v,ges}}{\rho}\right.} \quad 0.5 \tag{10}$$

Bestimmen der einzelnen Verluste:

$$\frac{\Delta p_{v,ein}}{\rho} = \zeta_{ein} \cdot \frac{c_1^2}{2} \quad 0.5 \tag{11}$$

$$\frac{\Delta p_{v,R1}}{\rho} = \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{c_1^2}{2} \quad 0.5 \tag{12}$$

$$\frac{\Delta p_{v,uv}}{\rho} = \zeta_{uv} \cdot \frac{c_2^2}{2} \quad 0.5 \tag{13}$$

$$\frac{\Delta p_{v,R2}}{\rho} = \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} \cdot \frac{c_2^2}{2} \quad 0.5 \tag{14}$$

Ermittlung des Gesamtverlustes:

$$\frac{\Delta p_{v,ges}}{\rho} = \frac{\Delta p_{v,ein} + \Delta p_{v,R1} + \Delta p_{v,uv} + \Delta p_{v,R2}}{\rho} \tag{15}$$

$$\frac{\Delta p_{v,ges}}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} \cdot [\frac{c_1^2}{c_2^2} \cdot (\zeta_{ein} + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1}) + (\zeta_{uv} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d_2})] \quad 0.5 \tag{16}$$

Volumenstrom ermitteln:

$$\dot{V} = c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2 \tag{17}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot d_2^2}{\frac{\pi}{4} \cdot d_1^2} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \quad 0.5 \tag{18}$$

Einsetzen und umformen:

$$\frac{\Delta p_{v,ges}}{\rho} = \frac{c_2^2}{2} \cdot [\zeta_{uv} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + (\frac{d_2}{d_1})^4 \cdot (\zeta_{ein} + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1})] \quad 0.5 \tag{19}$$

Einsetzen in Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{c_2^2}{2} + \frac{c_2^2}{2} \cdot [\zeta_{uv} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + (\frac{d_2}{d_1})^4 \cdot (\zeta_{ein} + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1})] = g \cdot (Z_0 - Z_1) \quad 0.5 \tag{20}$$

$$c_2^2 = \frac{2 \cdot g \cdot (Z_0 - Z_1)}{1 + \zeta_{uv} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + (\frac{d_2}{d_1})^4 \cdot (\zeta_{ein} + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1})} \tag{21}$$

$$\dot{V} = \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (Z_0 - Z_1)}{1 + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} + \zeta_{uv} + \frac{d_2^4}{d_1^4} \cdot (\lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} + \zeta_{ein})}} \tag{22}$$

2.2. Rohrverzweigung (10 Punkte)

Die skizzierte Rohrverzweigung ist an den Stellen (1), (2) und (3) durch Wellrohre mit der Gesamtfedersteifigkeit k_{ges} mit dem übrigen Rohrleitungssystem verbunden und kann sich nur horizontal in x-Richtung bewegen. In den Lagern soll keine Reibung auftreten. Die Strömung sei stationär und inkompressibel.

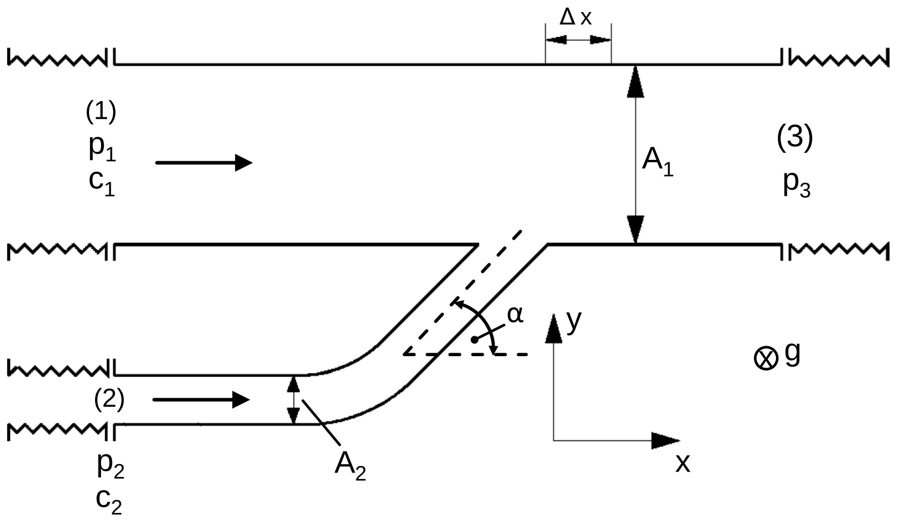


Abb. 2 Skizze einer Rohrverzweigung

Gegeben:

p_1	p_2	p_3
c_1	c_2	A_1
A_2	$\rho = const$	k_{ges}
α		

2.2a)

Wie groß ist die Geschwindigkeit c_3, wenn bei (1), (2) und (3) die Strömung ausgeglichen ist?

	Symbolschreibweise
c_3	$c_1 + c_2 \cdot \frac{A_2}{A_1}$ 1

2.2b)

Um welche Strecke Δx verschiebt sich das Rohr gegenüber der Ruhelage ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$), wenn die Wellrohre in der Ruhelage nicht vorgespannt sind? (Hinweis: $F_{Feder} = k \cdot x$)

	Symbolschreibweise
Δx	$\frac{1}{c_{ges}} \cdot \left[(p_1 - p_3) \cdot A_1 + \rho \cdot A_1 \left(c_1^2 - c_3^2\right) + p_2 A_2 + A_2 \cdot \rho c_3^2\right]$ 1

2.2c)

Wie groß ist die Kraft auf das Rohr in y-Richtung?

	Symbolschreibweise
F_y	0 1

Lösung

2.2a)

Zur Berechnung der Geschwindigkeit c_3 wird die Kontigleichung auf das Kontrollvolumen angewandt. Die vorliegende Strömung ist stationär und inkompressibel. Es folgt:

$$\rho \cdot c_1 \cdot A_1 + \rho \cdot c_2 \cdot A_2 = \rho \cdot c_3 \cdot A_1 \quad \text{0,5a} \tag{23}$$

bzw. da die Strömung inkompressibel ist.

$$c_1 \cdot A_1 + c_2 \cdot A_2 = c_3 \cdot A_1 \quad \text{0,5b} \tag{24}$$

$$c_3 = c_1 + c_2 \cdot \frac{A_2}{A_1} \tag{25}$$

2.2b)

$$\sum F_x = 0 = F_{I,1} + F_{p,1} + F_{I,2} + F_{p,2} - F_{I,3} - F_{p,3} - F_x \quad \text{1c} \tag{26}$$

$$F_{I,1} = \dot{m} \cdot c_1 = A_1 \cdot \rho \cdot c_1^2 \quad \text{0,5d} \tag{27}$$

$$F_{p,1} = p_1 A_1 \quad \text{0,5e} \tag{28}$$

$$F_{I,2} = \dot{m} \cdot c_2 = A_2 \cdot \rho \cdot c_2^2 \quad \text{0,5f} \tag{29}$$

$$F_{p,2} = p_2 A_2 \quad \text{0,5g} \tag{30}$$

$$F_{I,3} = \dot{m} \cdot c_3 = A_3 \cdot \rho \cdot c_3^2 = A_3 \cdot \rho \cdot \left(c_1 + \frac{A_2}{A_1} \cdot c_2\right)^2 = A_1 \cdot \rho \cdot \left(c_1 + \frac{A_2}{A_1} \cdot c_2\right)^2 \qquad \text{0,5h} \tag{31}$$

$$F_{p,3} = p_3 A_3 = p_3 A_1 \qquad \text{0,5i} \tag{32}$$

$$A_1 \cdot \rho \cdot c_1^2 + p_1 A_1 + A_2 \cdot \rho \cdot c_2^2 + p_2 A_2 - A_3 \cdot \rho \cdot c_3^2 - p_3 A_3 - F_x = 0 \tag{33}$$

$$F_x = (p_1 - p_3) \cdot A_1 + \rho \cdot A_1 \left(c_1^2 - c_3^2\right) + p_2 A_2 + \rho \cdot A_2 \cdot c_2^2 \qquad \text{1j} \tag{34}$$

$$F_x = F_F = c_{ges} \cdot \Delta x \qquad \text{1k} \tag{35}$$

$$\Delta x = \frac{1}{c_{ges}} \cdot \left[(p_1 - p_3) \cdot A_1 + \rho \cdot A_1 \left(c_1^2 - c_3^2\right) + p_2 A_2 + A_2 \cdot \rho c_3^2\right] \tag{36}$$

2.2c)

Da in y-Richtung keine Impulskräfte auf das Kontrollvolumen wirken, folgt:

$$F_y = 0 \tag{37}$$

3. Kompressible Strömungen

3.1. Überschallflugzeug (16 Punkte)

Ein Überschallflugzeug befindet sich in 10.000 m Höhe. Dessen Geschwindigkeit wird mittels Satellitenüberwachung zu 900 km/h bestimmt. Um das Flugzeug mit Überschall fliegen zu lassen, ist jedem Triebwerk eine Lavaldüse nachgeschaltet. Die Zustandsänderungen innerhalb der Lavaldüse sind isentrop. Es soll für alle Aufgabenteile das ideale Gasgesetz gelten.

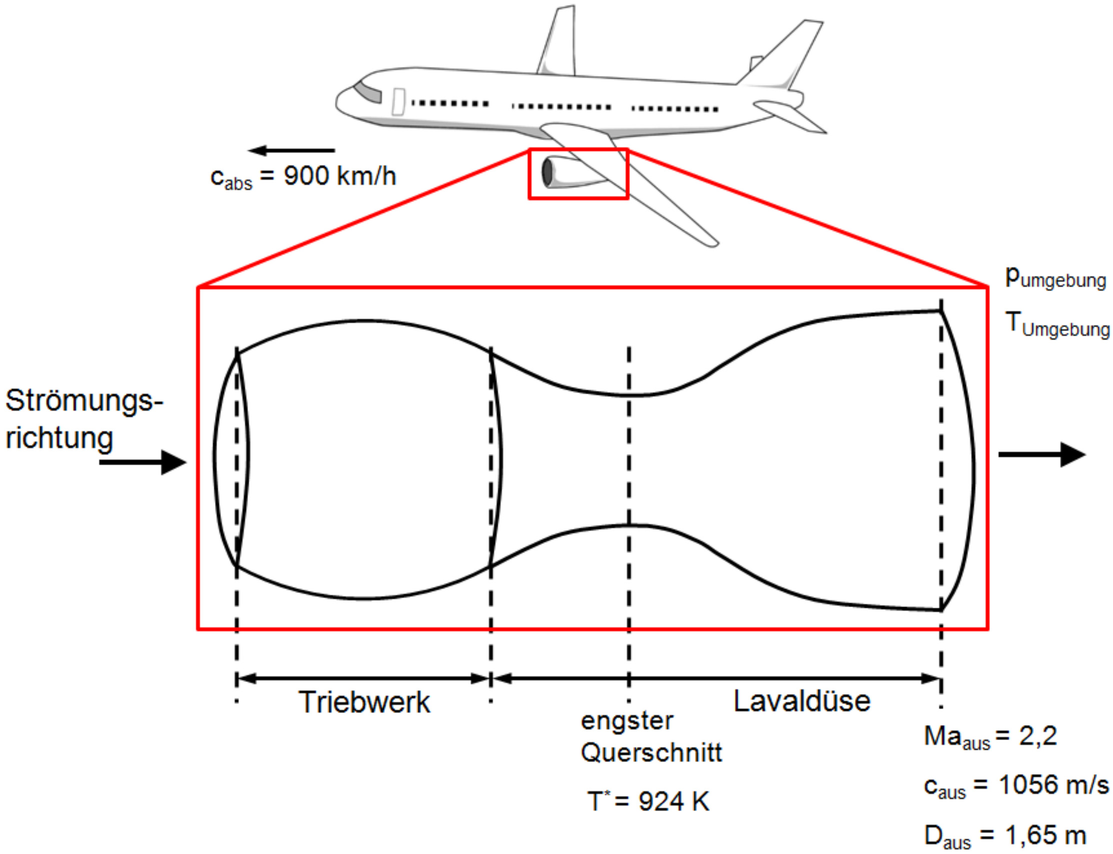


Abb. 3 Überschallflugzeug

Gegeben:

Luft in 10.000 m Höhe

$c_p(-55...-1°C) = 1007 J/(kgK)$ $\quad$ $T_{Umgebung} = -55°C$

$p_{Umgebung} = 0,196 bar$ $\quad$ $R_L = 287 J/(kgK)$

Luft in der Lavaldüse

$c_p(0...1800°C) = 1260 J/(kgK)$ $\quad$ $R_L = 287 J/(kgK)$

Lavaldüse

$Ma_{aus} = 2,2$

$c_{aus} = 1056 m/s$

$D_{aus} = 1,65 m$

Zur Vereinfachung zusätzlich gegeben: $T^* = 924 K$

Flugzeug

$c_{abs} = 900 km/h$

3.1a)

Geben Sie die Machzahl an, mit der das Flugzeug fliegt.

	Symbolschreibweise	Wert
Ma	$\frac{c_{abs}}{\sqrt{\kappa \cdot R_L \cdot T_{Umgebung}}}$ 1	$0,844$ 0.5

3.1b)

Wie groß ist die Temperatur, der Massenstrom sowie die auf die Schubdüse ausgeübte Kraft der abströmenden Gase?

	Symbolschreibweise	Wert
T_{aus}	$\frac{c_{aus}^2}{Ma_{aus}^2 \cdot R_L \cdot \kappa}$ 1	617.5 K 0.5

	Symbolschreibweise	Wert
$\dot{m}$	$\frac{\pi}{4} D_{aus}^2 \cdot c_{aus} \cdot \frac{p_{Umgebung}}{R_L \cdot T_{aus}}$ 1	248.37 kg/s 0.5

	Symbolschreibweise	Wert
F_S	$\dot{m} \cdot c_{aus}$ 1	262.3 kN 0.5

3.1c)

Berechnen Sie die Zustandsgrößen c^*, ρ^* sowie die engste Querschnittsfläche A^*.

	Symbolschreibweise	Wert
c^*	$\sqrt{\kappa \cdot R_L \cdot T^*}$ 1	586 m/s 0.5

	Symbolschreibweise	Wert
ρ^*	$\rho_{aus}\left(1-\frac{\kappa-1}{2\kappa}\frac{\rho_{aus}}{p_{Umgebung}}\left(c^{*2}-c_{aus}^2\right)\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$ 1	0.425 kg/m^3 0.5

	Symbolschreibweise	Wert
A^*	$\frac{\dot{m}}{c^*\cdot\rho^*}$ 1	0.997 m^2 0.5

Lösung

3.1a)

Berechnung der Machzahl mit der das Flugzeug fliegt

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \tag{38}$$

$$c_v = c_p - R = 720\frac{J}{kgK} \tag{39}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_p - R} = 1,4 \tag{40}$$

0,5a

$$a = \sqrt{\kappa R_L T_{Umgebung}} = 296,06m/s \tag{41}$$

0,5b

$$c = 900km/h = 250m/s \tag{42}$$

$$Ma = \frac{c}{a} = 0,844 \tag{43}$$

0,5c

3.1b)

Bestimmung der Temperatur am Austritt

$$c_p = 1260\frac{J}{kgK} \tag{44}$$

$$c_v = c_p - R = 973\frac{J}{kgK} \tag{45}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,3 \tag{46}$$

$$Ma_{aus} = \frac{c_{aus}}{\sqrt{\kappa \cdot R_L \cdot T_{aus}}} \tag{47}$$

0,5d

$$T_{aus} = \frac{c_{aus}^2}{Ma_{aus}^2 \cdot \kappa \cdot R_L} = 617,53K \tag{48}$$

$$\dot{m} = A_{aus} \cdot c_{aus} \cdot \rho_{aus} \tag{49}$$

0,5e

$$\rho_{aus} = \frac{p_{aus}}{R_L \cdot T_{aus}} = 0,11\frac{kg}{m^3} \tag{50}$$

0,5f

$$\dot{m} = \frac{\pi}{4} D_{aus}^2 \cdot c_{aus} \cdot \rho_{aus} = 248,37kg/s \tag{51}$$

$$F_S = \dot{m} \cdot c_{aus} = 262,78kN \tag{52}$$

0,5g

3.1c)

Machzahl im engsten Querschnitt beträgt Ma = 1. Daraus folgt

$$c^* = a^* = \sqrt{\kappa \cdot R_L \cdot T^*} \quad 1h \tag{53}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_{aus}} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_{aus}}{p_{Umgebung}} \left(c^{*2} - c_{aus}^2\right)\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad 0{,}5i \tag{54}$$

$$\rho^* = \rho_{aus} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_{aus}}{p_{Umgebung}} \left(c^{*2} - c_{aus}^2\right)\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = 0,428 \frac{kg}{m^3} \tag{55}$$

$$\dot{m} = A^* \cdot c^* \cdot \rho^* \quad 0{,}5j \tag{56}$$

$$A^* = \frac{\dot{m}}{c^* \cdot \rho^*} = 0,997 m^2 \tag{57}$$

Formelsammlung

Viskosität

$$\eta = \nu\rho \tag{6.1}$$

mit η : dynamische Viskosität, [Ns/m^2]
ν : kinematische Viskosität, [m^2/s]
ρ : Dichte, [kg/m^3]

Newtonsches Fluid:

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{6.2}$$

mit τ : Scherspannung, [N/m^2]
u : Strömungsgeschwindigkeit, [m/s]
y : Koordinate senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit, [m]

Oberflächenspannung und Kapillarität

Drucksprung Δp in der Phasengrenzfläche eines kugelförmigen Tropfens mit dem Radius r:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad ; \quad \text{mit} \quad \sigma : \text{Oberflächenspannung, [N/m]} \tag{6.3}$$

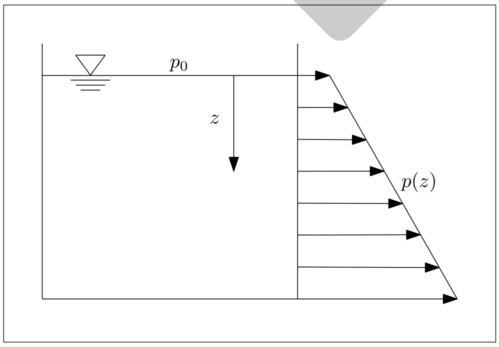
Steighöhe h bei Kapillaren mit kreisförmigem Querschnitt:

$$h = \frac{2\sigma \cos\alpha}{\rho g r} \quad ; \quad \text{mit} \quad \alpha : \text{Randwinkel} \tag{6.4}$$

Hydrostatik

Hydrostatischer Druck:

$$p(z) = p_0 + \rho g z \tag{6.5}$$



Hydrostatischer Auftrieb:

$$F_A = \rho g V \quad ; \quad \text{mit} \quad V : \text{Volumen der verdrängten Flüssigkeit} \tag{6.6}$$

Hydrodynamik

Massenbilanz

$$\frac{\mathrm{d}m_{KV}}{\mathrm{d}t} = \iiint \rho\ \vec{n}\cdot\vec{c}\ \mathrm{d}A \tag{6.7}$$

mit $\vec{n}$: Normalvektor
KV : beliebiges Kontrollvolumen

Impulssatz

$$\iint \rho\vec{c}\ \vec{n}\cdot\vec{c}\ \mathrm{d}A = -\iint p\vec{n}\ \mathrm{d}A + \iiint \rho\vec{g}\ \mathrm{d}V + \vec{F}_R + \vec{F}_{12} \tag{6.8}$$

mit $\vec{F}_R$: Reibungskraft
$\vec{F}_{12}$: Haltekraft/Interaktion mit Wänden

Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho\, c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho\, c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \tag{6.9}$$

Erweiterung für verlustbehaftete Strömungen mit Energiezufuhr:

$$\frac{1}{2}\rho\, c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 + \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{V}} = \frac{1}{2}\rho\, c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{12} \tag{6.10}$$

mit $\dot{W}_{12} > 0$: zwischen Position 1 und 2 zugeführte Leistung, [$\mathrm{N\,m\,s^{-1}}$]
$\dot{V}$: Volumenstrom, [m^3/s]
Δp_{12} : Druckverlust zwischen Position 1 und 2, [Pa]

Druckverlust in Rohrströmungen:

$$\Delta p_{12} = \sum_k \frac{1}{2}\rho\, c_k^2\, \lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2}\rho\, c_i^2\, \xi_i \tag{6.11}$$

mit λ_k : Rohrreibungszahl
l_k : Länge des Rohrabschnitts k
d_k : Durchmesser des Rohrabschnitts k
ξ_i : weitere Verlustbeiwerte des Rohrabschnitts i

Impulsmomentensatz

$$(\rho_2 c_2^2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2} + p_2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2}) - (\rho_1 c_1^2 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1} + p_1 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1}) = \sum \vec{M}_{12} \tag{6.12}$$

mit $\sum \vec{M}_{12}$: Summe der äußeren, an der Oberfläche der Kontrollraumes angereifen Momente
$\vec{e}_t$: Einheitsvektor, in Strömungsrichtung zeigend

Euler'sche Turbinengleichung:

$$M_{12} = \dot{m}(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}) \tag{6.13}$$

mit c_u : Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung
r : Hebelarm

Energiebilanz

$$\left(u_2+\frac{c_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho_2}+g\,z_2\right)-\left(u_1+\frac{c_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho_1}+g\,z_1\right)=q_{12} \tag{6.14}$$

mit u : spez. innere Energie,[J/kg]
$q_{12}=\dot{Q}/\dot{m}$: zwischen Position 1 und 2 zugeführte spezifische Wärmemenge, [J/kg]

Interne Strömungen

Laminare Rohrströmung

Geschwindigkeitsprofil:

$$c(r)=\frac{\Delta p R^2}{4\eta l}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]=c_{\max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{6.15}$$

mit Δp : Druckunterschied zwischen zwei im Abstand l auf den Stromfaden liegenden Punkten
l : Länge des Rohrabschnittes über dem der Druckunterschied Δp auftritt

Volumenstrom:

$$\dot{V}=\frac{\pi R^4\Delta p}{8\eta l}\quad \text{(Gesetz von Hagen-Poiseuille)} \tag{6.16}$$

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p=\frac{1}{2}\rho c_m^2\lambda\frac{l}{d} \tag{6.17}$$

mit c_m : über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)
λ : Rohreibungszahl

Die Rohrreibungszahl für laminare Strömungen ist

$$\lambda=\frac{64}{Re} \tag{6.18}$$

mit der Reynolds-Zahl:

$$Re=\frac{c_m\,d}{\nu} \tag{6.19}$$

Turbulente Rohrströmung

Geschwindigkeitsprofil:

$$\frac{\overline{c}(r)}{\overline{c}_{\max}}=\left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/7}\qquad , \quad Re\le 10^5 \tag{6.20}$$

Dieses $1/7$-Potenzgesetz gilt nicht in Wandnähe.
Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p=\frac{1}{2}\rho\overline{c}_m^2\lambda\frac{l}{d} \tag{6.21}$$

mit $\overline{c}_m$: zeitliche und über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

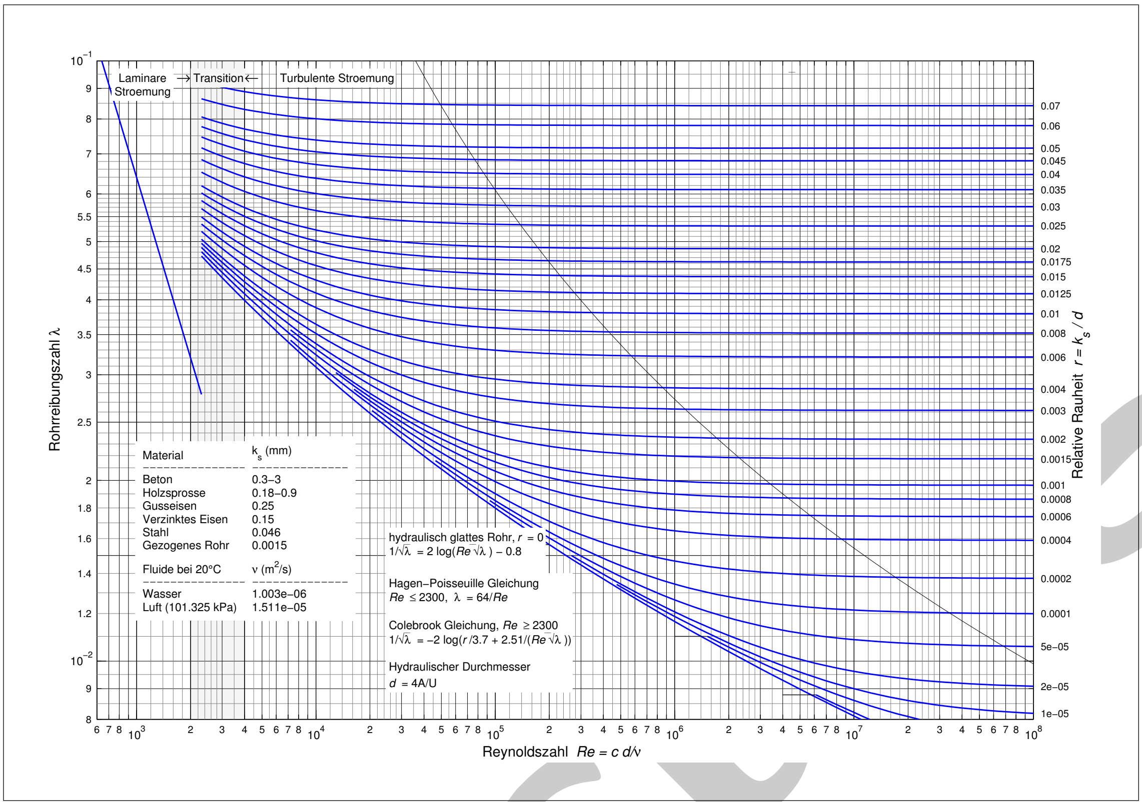
Die Rohrreibungszahl für hydraulisch glatte Rohre:

$$\lambda=\frac{0.3164}{Re^{1/4}}\qquad \text{für}\quad Re\le 10^5\quad \text{(Blasius)} \tag{6.22}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\log(Re\sqrt{\lambda})-0,8\qquad \text{für}\quad 10^5\le Re\le 3\cdot 10^6\quad \text{(Prandtl)} \tag{6.23}$$

Moody-Diagramm

Das Moody-Diagramm stellt die Rohrreibungszahl λ in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re (laminare und turbulente Strömungen) und der äquivalenten Sandkornrauhigkeit k_s für technisch rauhe Rohre dar.



Externe Strömungen

Grenzschicht an einer ebenen Platte

Grenzschichtdicke (laminar):

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}} \tag{6.24}$$

Reynoldszahl bezogen auf die Lauflänge:

$$Re_x = \frac{c_\infty x}{\nu} \tag{6.25}$$

mit c_∞ : Anströmgeschwindigkeit parallel zur Plattenoberfläche
x : überströmte Länge, Beginn: Plattenvorderkante

Laminar-turbulenter Umschlag:

$$Re_{x_{krit}} = \frac{c_\infty x_{krit}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5 \tag{6.26}$$

Strömungswiderstand

Gesamtwiderstand

$$F_W = F_{w,\tau} + F_{w,p} = c_w \frac{\rho}{2} c_\infty^2 A \tag{6.27}$$

mit $F_{w,\tau}$: Widerstandskraft infolge der Reibung
$F_{w,p}$: Widerstandskraft infolge der Druckdifferenz
c_w : Widerstandskoeffizient
A : angeströmmte oder umströmmte Fläche

Reibungswiderstand einer ebenen Platte:

$$c_{w,\tau} = \begin{cases} \dfrac{1,328}{\sqrt{Re_l}} & \text{lam. Grenzschicht} \\ \dfrac{0,074}{Re_l^{1/5}} & \text{turb. Grenzschicht} \end{cases} \tag{6.28}$$

mit $Re_l : \dfrac{c_\infty l}{\nu}$

Ausströmvorgänge

Ausströmgeschwindigkeit für ein *inkompressibles* Fluid ($c_{innen} = c_0 = 0$):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p_{aus}) + 2gh} \tag{6.29}$$

Ausströmgeschwindigkeit für ein *kompressibles* Fluid ($c_{in} = 0$):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} R T_0 \left(1 - \left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} \tag{6.30}$$

Massenstrom:

$$\dot{m} = A_{aus} c_{aus} \rho_{aus} = A_{aus} \sqrt{2 p_0 \rho_0}\, \psi \tag{6.31}$$

mit Ausflußfunktion:

$$\psi = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1}\left(\left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)} \tag{6.32}$$

Kritisches Druckverhältnis:

$$\left(\frac{p_{aus}}{p_0}\right)^* = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{6.33}$$

Gasdynamik

Thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad ; \quad \text{mit} \quad R : \text{Gaskonstante, [J/(kg K)] und } T : \text{Temperatur, [K]} \tag{6.34}$$

Isentropenbeziehung:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa-1} \quad ; \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} : \text{Isentropenexponent} \tag{6.35}$$

$$R = c_p - c_v = \frac{\kappa - 1}{\kappa} c_p \tag{6.36}$$

Spezifische Enthalpie:

$$h = u + \frac{p}{\rho} \qquad \text{mit} \quad u: \text{spez. innere Energie, [J/kg]} \tag{6.37}$$

Schallgeschwindigkeit:

$$a = \sqrt{\kappa R T} \tag{6.38}$$

Mach-Zahl:

$$Ma = c/a \tag{6.39}$$

Zustandsänderung aus dem Ruhezustand (X_0) für ein ideales Gas bei isentroper, verlustfreier, stationärer Strömung:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \tag{6.40}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{6.41}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{6.42}$$

Zustandsänderung für den kritischen Zustand (X^*) eines idealen Gases in einer isentropen, verlustfreien, stationären Strömung:

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\kappa + 1}{2} \tag{6.43}$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{6.44}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{6.45}$$

Für die Strömungen zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 auf dem Stromfaden gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right) \tag{6.46}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{6.47}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{6.48}$$