

Klausur Strömungsmechanik 1 Herbst 2018

21. August 2018, Beginn 13:00 Uhr

Prüfungszeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind:

- Taschenrechner (nicht programmierbar)
- Lineal und Schreibmaterial (nur dokumentenecht => keinen Bleistift verwenden, kein TIPP-Ex)
- Mitgebrachtes Papier

Andere Hilfsmittel, insbesondere:

- Alte Klausuren
- Übungen der Vorlesung
- Handy, Laptop, Fachbücher, programmierbarer Taschenrechner

sind **nicht zugelassen**.

Weitere Hinweise:

Ergebnisse sind durch einen Rechenweg zu begründen und nur mit einer Einheit richtig. Die zu verwendenden Indizes sind (soweit gegeben) den Skizzen zu entnehmen, ansonsten in die Skizzen einzutragen.

Aufgabe	Punkte
1. Verständnisfragen	10
2. Inkompressible Strömungen	24,5
3. Kompressible Strömungen	15,5
Gesamt	50

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Prof. Dr.-Ing. J. Seume
S. Lehnhoff, F. Schwarzbach

1. Verständnisfragen (10 Punkte)



Kreuzen Sie richtige Aussagen an. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein.
(Nur vollständig richtig beantwortete Fragen werden gewertet.)

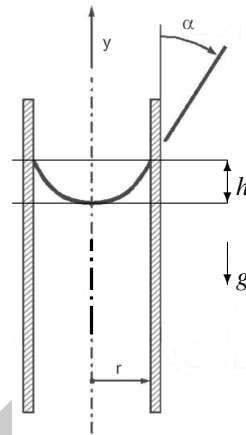
Oberflächenspannung U-Rohr-Manometer

(1)

Das gezeigte System sei durch

$$\sigma = 0.072 \text{ N/m} \quad \alpha = 45^\circ \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad d = 6 \text{ mm}$$



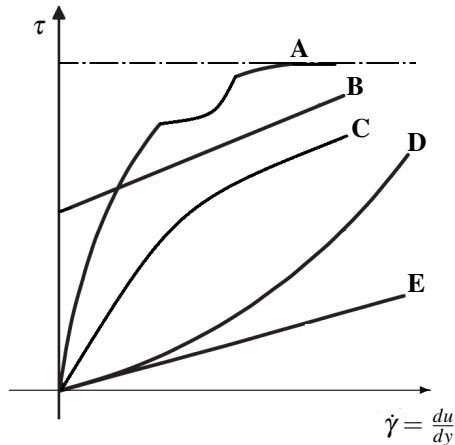
beschrieben. Welche Aussagen sind richtig?

- $h = 3.46 \times 10^{-3} \text{ m}$
- $h = 6.92 \times 10^{-3} \text{ m}$
- $h = 6.92 \times 10^{-3} \text{ N m}$
- $h = 6.92 \times 10^{-6} \text{ N m}$

Viskosität von Flüssigkeiten

(1)

Ordnen Sie die Flüssigkeiten den gezeigten Viskositätsverläufen zu

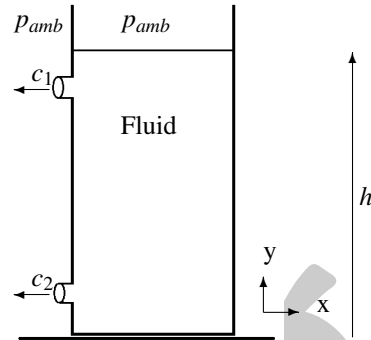


- E Newtonsche Flüssigkeit
- D Scherdickende Flüssigkeit
- B Bingham Flüssigkeit
- C Scherdünnende Flüssigkeit

Ausfluss aus Behälter

(1)

Der Behälter ist unendlich hoch ($h \rightarrow \infty$) und hat einen konstanten Wasserspiegel. Der Untergrund ist reibungsfrei.



- $c_1 > c_2$.
- Das Gefäß bewegt sich in positive x-Richtung.
- $c_1(\text{Fluid=Wasser}) > c_1(\text{Fluid=Ethanol})$

1.5. Moody-Diagramm

(1)

Welche der Aussagen stimmen für eine Rohrströmung mit

Mittlere Geschwindigkeit $\bar{c}_m = 120 \text{ m/s}$; Radius $r = 10 \text{ mm}$; Kinematische Viskosität $\nu = 1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; Sandkornrauheit $k_s = 1.6 \times 10^{-4} \text{ m}$

- Die Strömung ist laminar.
- Die Strömung ist turbulent.
- Das Rohr ist als hydraulisch glatt anzusehen.
- Das Rohr ist als hydraulisch rau anzusehen.

Rohrströmung

(2)

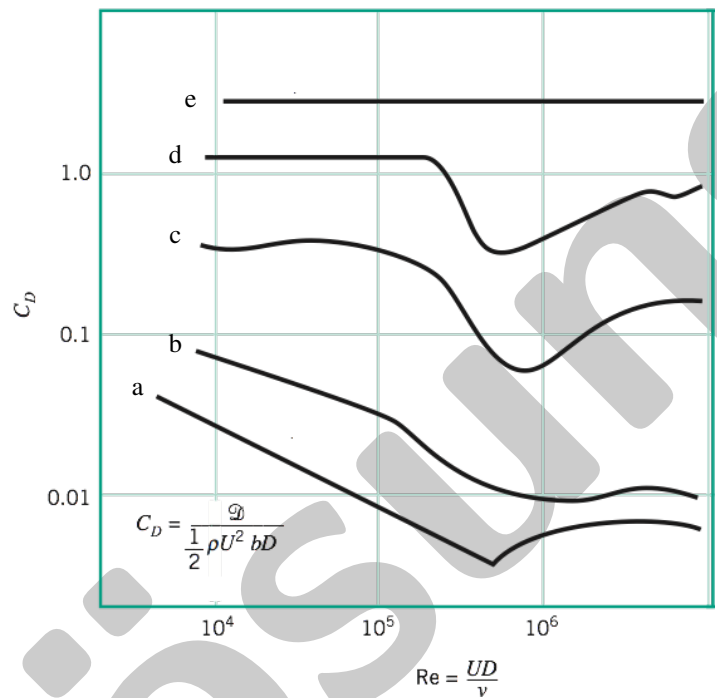
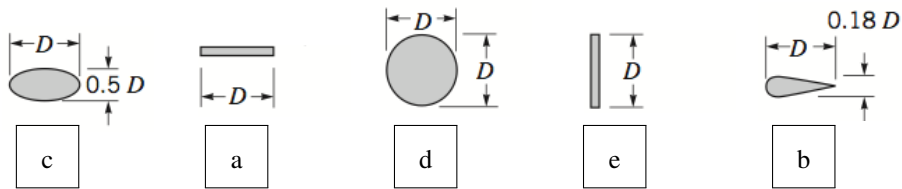
In einem geraden Rohr mit dem Durchmesser $d = 2 \text{ cm}$ fließt Wasser ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) mit einer mittleren Geschwindigkeit von $c_m = 0.0625 \text{ m/s}$. Wie hoch ist der Druckverlust Δp_V wenn das Rohr 1.5 m lang ist und Sie Einlaufeffekte vernachlässigen.

- 2 bar
- 70 Pa
- 2 Pa
- 7.5 Pa
- 18000 Pa

Widerstand

(2)

Ordnen Sie die dargestellten Widerstandsverläufe den umströmten Körper zu.



Auftriebskraft am Tragflügel

(1)

Was ist die Voraussetzung für eine Auftriebskraft an einem Tragflügel?

- Der statische Druck oberhalb des Flügels ist größer als unterhalb.
- Abriss der Strömung auf der Saugseite.
- Der statische Druck unterhalb des Flügels ist größer als oberhalb.

Kompressible Effekte

(1)

Ab welcher Machzahl müssen kompressible Effekte berücksichtigt werden?

- Ausschließlich bei optimal angepassten Lavaldüsen
- $Ma > 1$
- $Ma > 0,3$
- $Ma > 0,7$
- Immer

2. Inkompressible Strömungen

2.1. Wasserturbine (14 Punkte)



Aus einem oberen Becken mit konstantem Wasserspiegel h_1 strömt Wasser mit der Dichte ρ , der kinematischen Viskosität ν und der Fließgeschwindigkeit c durch eine Rohrleitung in eine Wasserturbine. Das Rohr besitzt die gegebenen Längen L_1 und L_2 sowie die Reibungskoeffizienten am Eintritt ζ_E sowie in der Krümmung ζ_{Kr} und die Wandrauigkeit k . Die Strömung am Turbinenaustritt wird über die Turbinenaustrittsleitung in ein unteres Becken mit ebenfalls konstantem Wasserspiegel geleitet. Der Umgebungsdruck beträgt p_b und es wirkt der Ortsfaktor g .

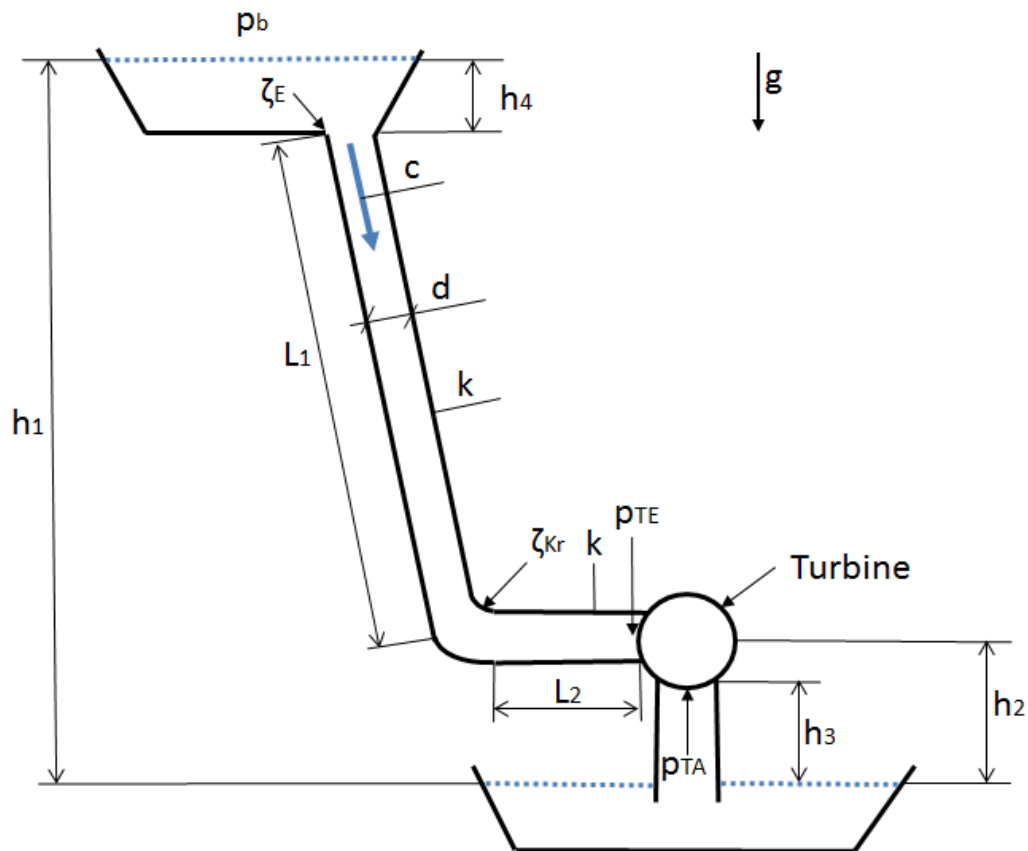


Abb. 1 Wasserturbine

Gegeben:

$p_b = 1 \text{ bar}$
 $L_1 = 168 \text{ m}$
 $h_1 = 180 \text{ m}$
 $h_4 = 8 \text{ m}$
 $\zeta_E = 0,15$

$\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
 $L_2 = 18 \text{ m}$
 $h_2 = 5,8 \text{ m}$
 $k = 0,5 \text{ mm}$
 $\zeta_{Kr} = 0,22$

$\nu = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
 $c = 4,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $h_3 = 5 \text{ m}$
 $d = 800 \text{ mm}$
 $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Hinweis:

Berechnung der nutzbaren Turbinenleistung:

$$P = \dot{m} \cdot Y \tag{1}$$

Y: spezifische Nutzarbeit der Turbine

$$Y = \frac{p_{TE} - p_b}{\rho} \tag{2}$$

2.1a)

Bestimmen Sie den Volumenstrom \dot{V} sowie den Massenstrom \dot{m} in der Rohrleitung.

	Wert
\dot{V}	2,11 m ³ /s 0,5
\dot{m}	2.110 kg/s 0,5

2.1b)

Bestimmen Sie die Reynoldszahl in der Rohrleitung. Ist die Strömung laminar oder turbulent?

	Wert
Re	$3,36 \cdot 10^6$ 0,5
Strömungszustand	turbulent 0,5

2.1c)

Bestimmen Sie den Druckverlust Δp_v in der Zulaufleitung.

	Wert
Δp_v	40,175 kPa 0,5

2.1d)

Bestimmen Sie den statischen Druck am Turbineneintritt ohne Reibung p_{TE} sowie unter Berücksichtigung der Reibung $p_{TE,R}$.

	Wert	
P_{TE}	1.800,08kPa	0,5
$P_{TE,R}$	1.759,9kPa	0,5

2.1e)

Ermitteln Sie die nutzbare Turbinenleistung ohne Reibung P_{th} sowie unter Berücksichtigung der Reibung P_{real} .

	Wert	
P_{th}	3,59MW	0,5
P_{real}	3,5MW	0,5

Lösung

2.1a)

Bestimmen Sie den Volumenstrom \dot{V} sowie den Massenstrom \dot{m} in der Rohrleitung:

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \quad (3)$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot 0,8^2 = 0,5027m^2 \quad (4)$$

$$\dot{V} = A \cdot c = 0,5026m^2 \cdot 4,2m/s = 2,11 \frac{m^3}{s} \quad (5)$$

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = 10^3 kg/m^3 \cdot 2,11m/s = 2,11 \cdot 10^3 \frac{kg}{s} \quad (6)$$

2.1b)

Bestimmen Sie die Reynoldszahl in der Rohrleitung:

$$Re = \frac{c \cdot d}{\nu} = \frac{4,2 \cdot 0,8m^2/s}{10^{-6}m^2/s} = 3,36 \cdot 10^6 \quad (7)$$

2.1c)

Bestimmen Sie den Druckverlust Δp_V in der Zulaufleitung:

$$k/d = 6,25 \cdot 10^{-4} \quad (0.5) \quad (8)$$

$$\lambda = f(Re, k/d = 6,25 \cdot 10^{-4}) = 0,018 \quad (0.5) \quad (9)$$

$$\Delta p_V = \Delta p_{VE} + \Delta p_{V,R} + \Delta p_{V,Kr} \quad (0.5) \quad (10)$$

$$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} \cdot c^2 \cdot \left(\lambda \cdot \frac{L_1 + L_2}{d} + \zeta_E + \zeta_{Kr} \right) \quad (0.5) (0.5) (0.5) \quad (11)$$

$$\Delta p_V = \frac{10^3 \text{ kg/m}^3}{2} \cdot 4,2^2 (\text{m/s})^2 \cdot \left(0,018 \cdot \frac{168 + 18}{0,8} + 0,15 + 0,22 \right) \quad (12)$$

$$\Delta p_V = 40.175,1 \text{ Pa} \quad (13)$$

2.1d)

Bestimmen Sie den statischen Druck am Turbineneintritt ohne Reibung p_{TE} sowie unter Berücksichtigung der Reibung $p_{TE,R}$:

Bernoulli vom oberen Becken bis zum Turbineneintritt, ohne Reibung:

$$0.5 \quad p_b + \rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{\rho c^2}{2} + p_{TE} + \rho \cdot g \cdot h_2 \quad (0.5) \quad (14)$$

$$p_{TE} = p_b + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) - \frac{\rho c^2}{2} \quad (0.5) \quad (15)$$

$$p_{TE} = 1.800,08 \text{ kPa} \quad (16)$$

Bernoulli vom oberen Becken bis zum Turbineneintritt, mit Reibung:

$$0.5 \quad p_b + \rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{\rho c^2}{2} + p_{TE,R} + \Delta p_V + \rho \cdot g \cdot h_2 \quad (0.5) \quad (17)$$

$$p_{TE,R} = p_b + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) - \frac{\rho c^2}{2} - \Delta p_V \quad (0.5) \quad (18)$$

$$p_{TE,R} = 1.800,08 \text{ kPa} - 40,175 \text{ kPa} \quad (19)$$

$$p_{TE,R} = 1.759,9 \text{ kPa} \quad (20)$$

2.1e)

Ermitteln Sie die nutzbare Turbinenleistung ohne Reibung P_{th} sowie unter Berücksichtigung der Reibung P_{real} :

Berechnung der Turbinenleistung ohne Reibung:

$$P_{th} = \dot{m} \cdot Y \quad (21)$$

Bestimmung der spezifischen Nutzarbeit ohne Reibung:

$$Y = \frac{p_{TE} - p_b}{\rho} = \frac{1.800,08kPa - 100.000Pa}{10^3 kg/m^3} = 1.700,08J/kg \quad (22)$$

$$P_{th} = 3.587.168,8W = 3,59MW \quad (23)$$

Bestimmung der Turbinenleistung mit Reibung:

$$P_{real} = \dot{m} \cdot (Y - Y_R) \quad (24)$$

Bestimmung der spezifischen Nutzarbeit mit Reibung:

$$Y_r = \frac{\Delta p_v}{\rho} = \frac{40.175Pa}{10^3 kg/m^3} = 40,175J/kg \quad (25)$$

$$P_{real} = 2.110kg/s \cdot (1.700,08 - 40,175)J/kg \quad (26)$$

$$P_{real} = 3.502.399,55W = 3,5MW \quad (27)$$

2.2. Mischer (10,5 Punkte)



Zwei Luftströme \dot{m}_1 und \dot{m}_2 mit verschiedenen Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in den Querschnitten A_1 und A_2 werden in einen Kanal mit dem Querschnitt A_3 geleitet. Dort stellt sich durch Vermischungsvorgänge der beiden Massenströme nach einer Mischungsstrecke eine Geschwindigkeit c_3 ein. Das Fluid kann als reibungsfrei angesehen werden. Die Strömungsgeschwindigkeiten liegen unter der Machzahl 0,2.

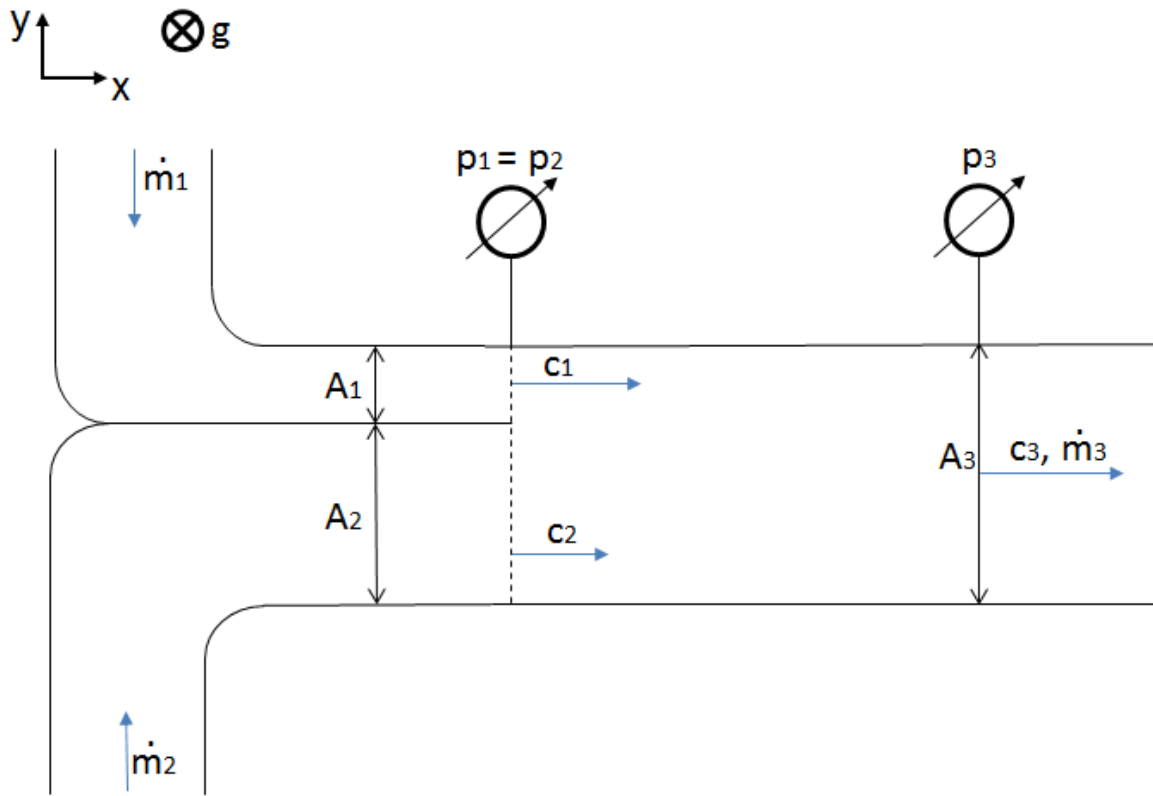


Abb. 2 Mischer

Gegeben:

$$\rho = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{1}{3}$$

$$c_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.2a)

Wie groß ist die sich einstellende Geschwindigkeit c_3 ?

	Symbolschreibweise	Wert
c_3	$\frac{1}{3} \cdot c_1 + \frac{2}{3} \cdot c_2$ ①	13,33 m/s ②

2.2b)

Bestimmen Sie die Druckdifferenz ($p_3 - p_1$).

	Symbolschreibweise	Wert
$(p_3 - p_1)$	$\rho \cdot \left(\frac{1}{3}1^2 + \frac{2}{3}c_2^2 - c_3^2\right)$, oder $\frac{2}{9} \cdot \rho \cdot (c_1^2 + c_2^2 - 2 \cdot c_1 \cdot c_2)$, oder $\frac{2}{9} \cdot \rho \cdot (c_1 - c_2)^2$ ①	26,67 Pa 0.5

Lösung

2.2a)

Wie groß ist die sich einstellende Geschwindigkeit c_3 ?

Konti-Gleichung:

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 \quad 0.5 \quad (28)$$

mit

$$\dot{m}_1 = \rho \cdot c_1 \cdot A_1 \quad 0.5 \quad (29)$$

$$\dot{m}_2 = \rho \cdot c_2 \cdot A_2 \quad 0.5 \quad (30)$$

$$\dot{m}_3 = \rho \cdot c_3 \cdot A_3 \quad 0.5 \quad (31)$$

und

$$A_2 = A_3 - A_1 \quad 0.5 \quad (32)$$

$$\rho \cdot c_3 \cdot A_3 = \rho \cdot c_1 \cdot A_1 + \rho \cdot c_2 \cdot A_2 \quad 0.5 \quad (33)$$

$$c_3 = \frac{A_1}{A_3} \cdot c_1 + \frac{A_2}{A_3} \cdot c_2 = \frac{A_1}{A_3} \cdot c_1 + \frac{A_3 - A_1}{A_3} \cdot c_2 \quad (34)$$

$$c_3 = \frac{1}{3} \cdot c_1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot c_2 = \frac{1}{3} \cdot c_1 + \frac{2}{3} \cdot c_2 \quad (35)$$

$$c_3 = \frac{1}{3} \cdot 20m/s + \frac{2}{3} \cdot 10m/s = 13,33m/s \quad (36)$$

2.2b)

Bestimmen Sie die Druckdifferenz ($p_3 - p_1$).

Kräfte am Kontrollraum:

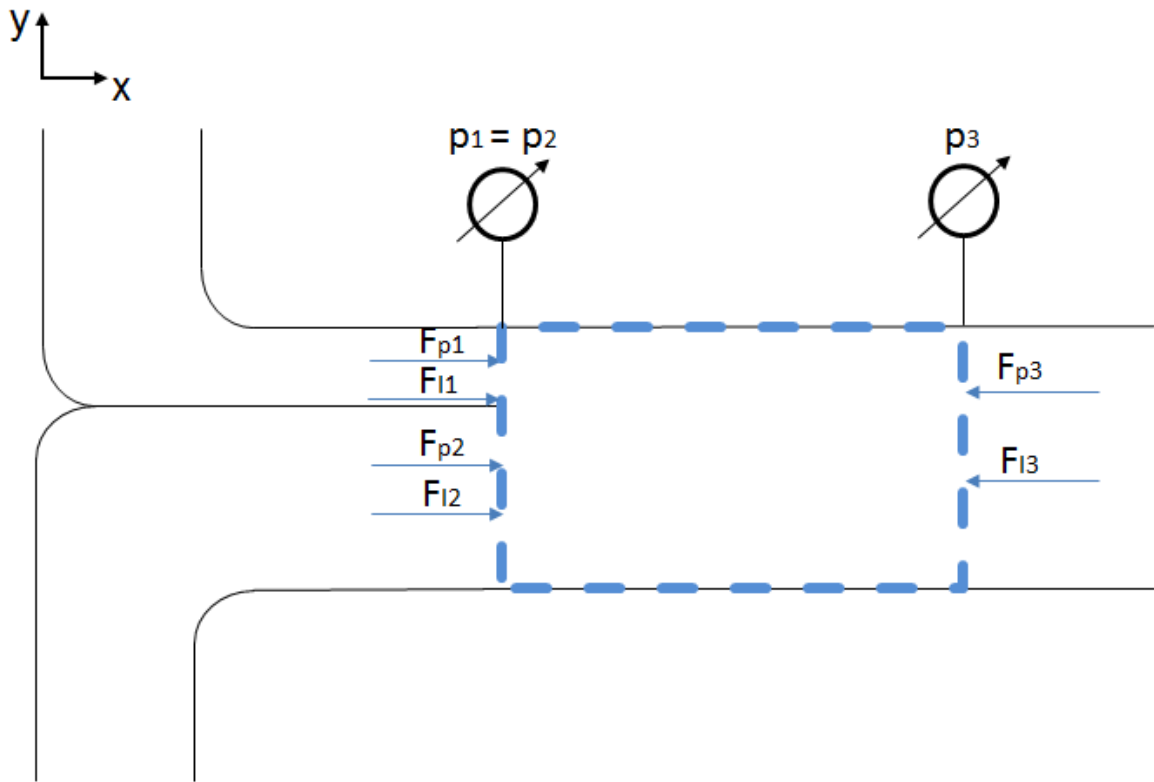


Abb. 3 FKB

Aufstellen der Impulsbilanz an Hand des Freikörperbildes:

$$\sum F_x = 0 = F_{p1} + F_{p2} + F_{I1} + F_{I2} - F_{p3} - F_{I3} \quad \textcircled{1} \quad (37)$$

mit

$$F_{I,1} = \dot{m}_1 \cdot c_1 = A_1 \cdot \rho \cdot c_1^2 \quad \textcircled{0,5} \quad (38)$$

$$F_{I,2} = \dot{m}_2 \cdot c_2 = A_2 \cdot \rho \cdot c_2^2 \quad \textcircled{0,5} \quad (39)$$

$$F_{I,3} = \dot{m}_3 \cdot c_3 = A_3 \cdot \rho \cdot c_3^2 \quad \textcircled{0,5} \quad (40)$$

$$F_{p,1} = p_1 \cdot A_1 \quad \textcircled{0,5} \quad (41)$$

$$F_{p,2} = p_2 \cdot A_2 \quad \textcircled{0,5} \quad (42)$$

$$F_{p,3} = p_3 \cdot A_3 \quad \textcircled{0,5} \quad (43)$$

$$F_{p3} - F_{p1} - F_{p2} = F_{I1} + F_{I2} - F_{I3} \quad (44)$$

$$p_3 \cdot A_3 - p_1 \cdot A_1 - p_1 \cdot A_2 = \rho \cdot (c_1^2 \cdot A_1 + c_2^2 \cdot A_2 - c_3^2 \cdot A_3) \quad (45)$$

0,5s

$$p_3 \cdot A_3 - p_1 \cdot A_3 = \rho \cdot (c_1^2 \cdot \frac{1}{3}A_3 + c_2^2 \cdot \frac{2}{3}A_3 - c_3^2 \cdot A_3) \quad (46)$$

$$p_3 - p_1 = \rho \cdot (\frac{1}{3}c_1^2 + \frac{2}{3}c_2^2 - c_3^2) \quad (47)$$

Alternativ: Einsetzen von

$$c_3 = (1 - \frac{1}{3}) \cdot c_2 + \frac{1}{3} \cdot c_1 = \frac{2}{3} \cdot c_2 + \frac{1}{3} \cdot c_1 \quad (48)$$

$$p_3 - p_1 = \rho \cdot (\frac{1}{3}c_1^2 + \frac{2}{3}c_2^2 - (\frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2)^2) \quad (49)$$

$$p_3 - p_1 = \rho \cdot (\frac{1}{3}c_1^2 + \frac{2}{3}c_2^2 - (\frac{1}{9}c_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot c_1 \cdot c_2 + \frac{4}{9}c_2^2)) \quad (50)$$

$$p_3 - p_1 = \rho \cdot (\frac{2}{9}c_1^2 + \frac{2}{9}c_2^2 - \frac{4}{9}c_1c_2) \quad (51)$$

$$p_3 - p_1 = \frac{2}{9}\rho \cdot (c_1 - c_2)^2 \quad (52)$$

$$p_3 - p_1 = \frac{2}{9} \cdot 1,2\text{kg/m}^3 \cdot (20\text{m/s} - 10\text{m/s})^2 = 26,67\text{Pa} \quad (53)$$

3. Kompressible Strömungen

3.1. Laval-Düse einer Turbine (15,5 Punkte)



Aus einem Druckbehälter mit dem Volumen $V = 50\text{m}^3$ bei dem absoluten Druck von $p_0 = 1,2\text{MPa}$ und der Temperatur von $T_0 = 433,15\text{K}$ soll der Luftmassenstrom von $\dot{m} = 0,15\text{kg/s}$ durch eine Laval-Düse in die freie Atmosphäre beim Austrittsdruck $p_2 = 100\text{kPa}$ ausströmen. Weitere zu beachtende Größen sind die spezifische Gaskonstante für Luft $R_L = 287,6\text{J}/(\text{kgK})$, der Durchmesser am Düseneintritt $d_1 = 15\text{mm}$, der Isentropenexponent $\kappa = 1,4$ und der Wert der Durchflussfunktion an am kritischen Düsendurchmesser $\Psi_{max}^* = 0,484$. Der adiabate und reibungsfreie Luftmassenstrom ist hier als ideales Gas anzusehen. Zu berechnen und zu entwerfen sind die Laval-Düse mit dem kritischen Querschnitt A^* , dem Austrittsquerschnitt A_2 und der Austrittsmachzahl Ma_2 sowie der Düsenlänge L für den Erweiterungswinkel der Düse von $\alpha = 7^\circ$.

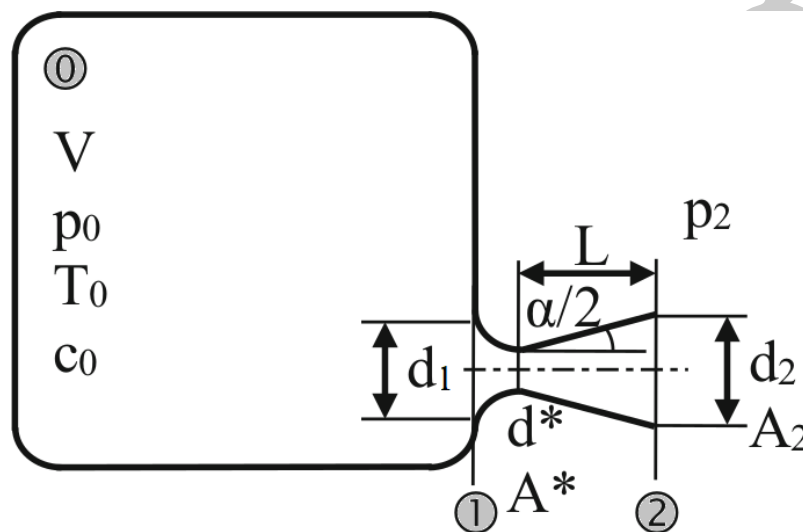


Abb. 4 Laval-Düse

Gegeben:

$$p_0 = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$p_2 = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\kappa = 1,4$$

$$T_0 = 433,15 \text{ K}$$

$$R_L = 287,6 \text{ J}/(\text{kgK})$$

$$\Psi_{max}^* = 0,484$$

$$\dot{m} = 0,15 \text{ kg/s}$$

$$d_1 = 15 \text{ mm}$$

$$\alpha = 7^\circ$$

3.1a)

Wie hoch ist das Druckverhältnis der Expansion, ist es überkritisch?

Symbol-schreibweise	unterkritisch oder überkritisch?	Wert
$\frac{p_2}{p_0}$	überkritisch ①	0,0833 ①.5

Berechnen Sie die Luftdichte im Druckbehälter.

	Symbolschreibweise	Wert
ρ_0	$\frac{p_0}{RT_0}$ ①	9.63 kg/m ³ ①.5

3.1b)

Wie groß ist der engste Düsendurchmesser?
Verwenden Sie zur Berechnung auch den Wert $\Psi_{max}^* = 0,484$.

	Symbolschreibweise	Wert
d^*	$\sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{\dot{m}}{\Psi_{max}^* \cdot \sqrt{2} \cdot p_0 \rho_0}}$ ①	0.00906 m ①.5

3.1c)

Wie hoch ist die Austrittstemperatur?

	Symbolschreibweise	Wert
T_2	$T_0 \cdot \frac{p_2}{p_0}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ ①	212.96 K ①.5

Berechnen Sie die Dichte am Düsenaustritt.

	Symbolschreibweise	Wert
ρ_2	$\frac{p_2}{RT_2}$ ①	1.6327 kg/m ³ ①.5

Wie hoch ist die Austrittsmachzahl?

	Symbolschreibweise	Wert
Ma_2	$\frac{\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right) \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}}{\sqrt{\kappa R T_2}}$ <p style="text-align: center;">①</p>	2,27 ①

3.1d)

Wie groß ist der Düsenaustrittsdurchmesser?

	Symbolschreibweise	Wert
d_2	$\sqrt{\frac{4}{\pi} A_2}$ <p style="text-align: center;">①</p>	0.01325 m ①

Berechne die Düsenlänge L für Erweiterungsteil mit $\alpha/2$.

	Symbolschreibweise	Wert
L	$\frac{1}{2} \frac{d_2 - d^*}{\tan(\alpha/2)}$ <p style="text-align: center;">①</p>	0.03425 m ①

Lösung

3.1a)

Kritisches Druckverhältnis:

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{100kPa}{1200kPa} = 0,0833 \quad (54)$$

$$\left[\frac{2}{\kappa + 1} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = \frac{p^*}{p_0} = 0,528 \quad (0.5) \quad (55)$$

$$0,0833 < 0,528 \quad (0.5) \quad (56)$$

→ ueberkritisch (57)

Luftdichte im Druckbehälter:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{1200 \cdot 10^3 Pa}{287,6 J/kgK \cdot 433,15 K} = 9,63 \frac{kg}{m^3} \quad (58)$$

3.1b)

Kritischer Düsenquerschnitt A^* :

Kritische Werte für Luft mit $\kappa = 1,4$; $\Psi_{max}^* = 0,484$

Engster Düsendurchmesser:

$$A^* = \frac{\dot{m}}{\Psi_{max}^* \cdot \sqrt{2} \cdot p_0 \cdot \rho_0} = \frac{0,15 kg/s}{0,484 \cdot \sqrt{2} \cdot 1200kPa \cdot 9,63 kg/m^3} = 64,5 mm^2 \quad (0.5) \quad (59)$$

$$d^* = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot A^*} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot 64,5 mm^2} = 0,00906 m \quad (60)$$

3.1c)

Austrittstemperatur

$$T_2 = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = 433,15 K \cdot \left(\frac{100kPa}{1200kPa} \right)^{\frac{0,4}{1,4}} = 433,15 K \cdot 0,08333^{\frac{0,4}{1,4}} = 212,96 K \quad (61)$$

Dichte am Düsenaustritt:

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{10^5 Pa}{287,6 J/kgK \cdot 212,96 K} = 1,6327 \frac{kg}{m^3} \quad (62)$$

Austrittsmachzahl:

$$c_2 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} = \left\{ \frac{2 \cdot 1,4}{0,4} \frac{1200kPa}{9,63 kg/m^3} \left[1 - \left(\frac{100kPa}{1200kPa} \right)^{\frac{0,4}{1,4}} \right] \right\}^{0,5} = 665,89 \frac{m}{s} \quad (1) \quad (63)$$

$$a_2 = \sqrt{\kappa RT_2} = \sqrt{1,4 \cdot 287,6 \frac{J}{kgK} \cdot 212,96 K} = 292,82 \frac{m}{s} \quad (0.5) \quad (64)$$

$$Ma_2 = \frac{c_2}{a_2} = \frac{665,89 m/s}{292,82 m/s} = 2,27 \quad (65)$$

3.1d)

Düsenaustrittsdurchmesser:

$$\dot{m} = \rho_2 c_2 A_2 = 0,15 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \rightarrow A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 c_2} = \frac{0,15 \text{kg/s}}{1,6327 \text{kg/m}^3 \cdot 665,89 \text{m/s}} = 137,978 \text{mm}^2 \quad (66)$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4}{\pi} A_2} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot 196,8 \text{mm}^2} = 0,01325 \text{m} \quad (67)$$

Düsenlänge für Erweiterungsteil für $\alpha/2 = 3,5^\circ$

$$L = \frac{1}{2} \frac{d_2 - d^*}{\tan(\alpha/2)} = \frac{1}{2} \frac{d_2 - d^*}{0,06116} = \frac{1}{2} \frac{13,25 \text{mm} - 9,06 \text{mm}}{0,06116} = 0,03425 \text{m} \quad (68)$$

Lösung

Formelsammlung

Viskosität

$$\eta = \nu \rho \quad (6.1)$$

mit η : dynamische Viskosität, [Ns/m²]

ν : kinematische Viskosität, [m²/s]

ρ : Dichte, [kg/m³]

Newtonsches Fluid:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad (6.2)$$

mit τ : Scherspannung, [N/m²]

u : Strömungsgeschwindigkeit, [m/s]

y : Koordinate senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit, [m]

Oberflächenspannung und Kapillarität

Drucksprung Δp in der Phasengrenzfläche eines kugelförmigen Tropfens mit dem Radius r :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad ; \quad \text{mit } \sigma : \text{Oberflächenspannung, [N/m]} \quad (6.3)$$

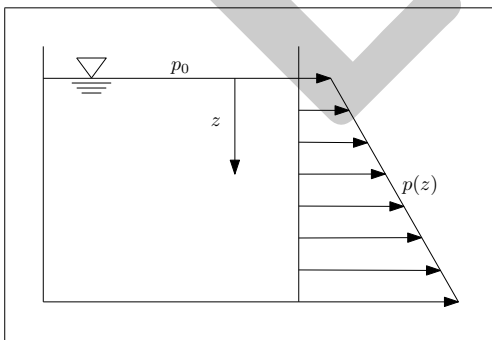
Steighöhe h bei Kapillaren mit kreisförmigem Querschnitt:

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r} \quad ; \quad \text{mit } \alpha : \text{Randwinkel} \quad (6.4)$$

Hydrostatik

Hydrostatischer Druck:

$$p(z) = p_0 + \rho g z \quad (6.5)$$



Hydrostatischer Auftrieb:

$$F_A = \rho g V \quad ; \quad \text{mit } V : \text{Volumen der verdrängten Flüssigkeit} \quad (6.6)$$

Hydrodynamik

Massenbilanz

$$\frac{dm_{KV}}{dt} = \iiint \rho \vec{n} \cdot \vec{c} \, dA \quad (6.7)$$

mit \vec{n} : Normalvektor
 KV : beliebiges Kontrollvolumen

Impulssatz

$$\iint \rho \vec{c} \vec{n} \cdot \vec{c} \, dA = - \iint p \vec{n} \, dA + \iiint \rho \vec{g} \, dV + \vec{F}_R + \vec{F}_{12} \quad (6.8)$$

mit \vec{F}_R : Reibungskraft
 \vec{F}_{12} : Haltekraft/Interaktion mit Wänden

Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2} \rho c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad (6.9)$$

Erweiterung für verlustbehaftete Strömungen mit Energiezufuhr:

$$\frac{1}{2} \rho c_1^2 + p_1 + \rho g z_1 + \frac{\dot{W}_{12}}{\dot{V}} = \frac{1}{2} \rho c_2^2 + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{12} \quad (6.10)$$

mit $\dot{W}_{12} > 0$: zwischen Position 1 und 2 zugeführte Leistung, [N m s⁻¹]
 \dot{V} : Volumenstrom, [m³/s]
 Δp_{12} : Druckverlust zwischen Position 1 und 2, [Pa]

Druckverlust in Rohrströmungen:

$$\Delta p_{12} = \sum_k \frac{1}{2} \rho c_k^2 \lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \sum_i \frac{1}{2} \rho c_i^2 \xi_i \quad (6.11)$$

mit λ_k : Rohrreibungszahl
 l_k : Länge des Rohrabschnitts k
 d_k : Durchmesser des Rohrabschnitts k
 ξ_i : weitere Verlustbeiwerte des Rohrabschnitts i

Impulsmomentensatz

$$(\rho_2 c_2^2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2} + p_2 A_2 \vec{r}_2 \times \vec{e}_{t,2}) - (\rho_1 c_1^2 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1} + p_1 A_1 \vec{r}_1 \times \vec{e}_{t,1}) = \sum \vec{M}_{12} \quad (6.12)$$

mit $\sum \vec{M}_{12}$: Summe der äußeren, an der Oberfläche der Kontrollraumes angreifenden Momente
 \vec{e}_t : Einheitsvektor, in Strömungsrichtung zeigend

Euler'sche Turbinengleichung:

$$M_{12} = \dot{m}(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}) \quad (6.13)$$

mit c_u : Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung
 r : Hebelarm

Energiebilanz

$$\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + g z_2\right) - \left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + g z_1\right) = q_{12} \quad (6.14)$$

mit u : spez. innere Energie, [J/kg]

$q_{12} = \dot{Q}/\dot{m}$: zwischen Position 1 und 2 zugeführte spezifische Wärmemenge, [J/kg]

Interne Strömungen**Laminare Rohrströmung**

Geschwindigkeitsprofil:

$$c(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = c_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad (6.15)$$

mit Δp : Druckunterschied zwischen zwei im Abstand l auf den Stromfaden liegenden Punkten

l : Länge des Rohrabschnittes über dem der Druckunterschied Δp auftritt

Volumenstrom:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l} \quad (\text{Gesetz von Hagen-Poiseuille}) \quad (6.16)$$

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho c_m^2 \lambda \frac{l}{d} \quad (6.17)$$

mit c_m : über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

λ : Rohrreibungszahl

Die Rohrreibungszahl für laminare Strömungen ist

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (6.18)$$

mit der Reynolds-Zahl:

$$Re = \frac{c_m d}{\nu} \quad (6.19)$$

Turbulente Rohrströmung

Geschwindigkeitsprofil:

$$\frac{\bar{c}(r)}{\bar{c}_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}, \quad Re \leq 10^5 \quad (6.20)$$

Dieses 1/7-Potenzgesetz gilt nicht in Wandnähe.

Druckverlust im geraden Rohr:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \bar{c}_m^2 \lambda \frac{l}{d} \quad (6.21)$$

mit \bar{c}_m : zeitliche und über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit (Stromfadentheorie)

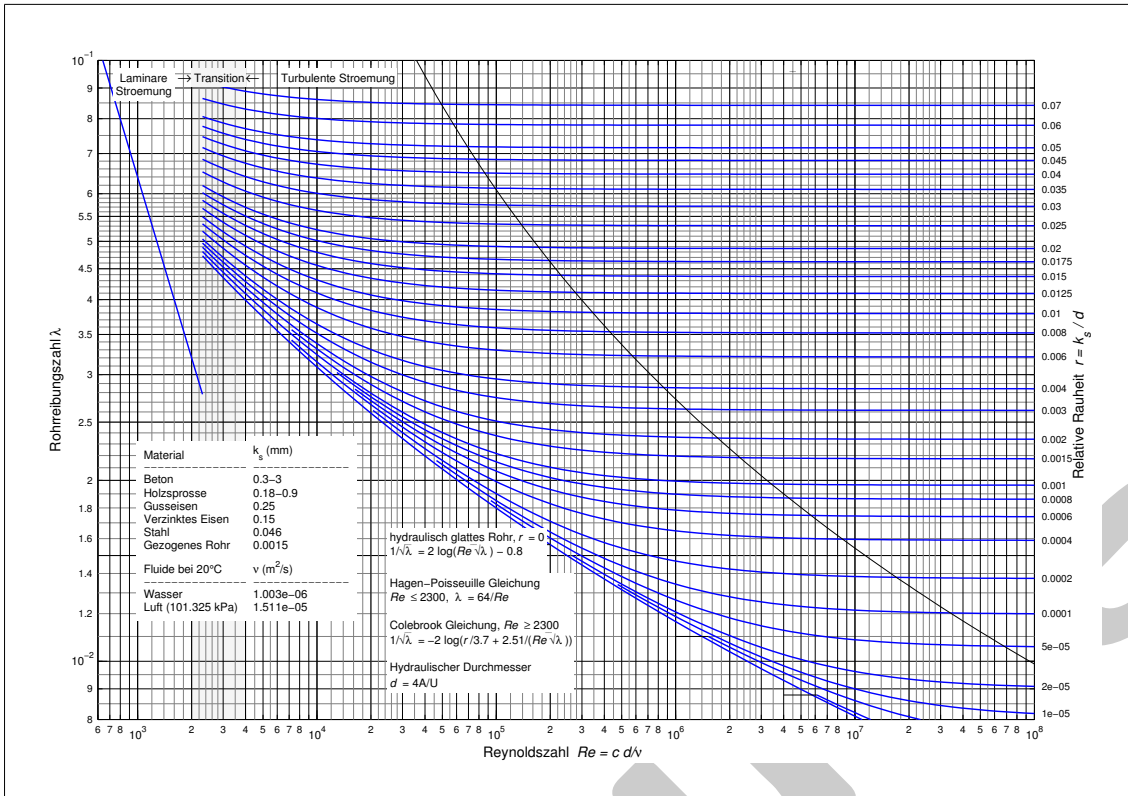
Die Rohrreibungszahl für hydraulisch glatte Rohre:

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} \quad \text{für } Re \leq 10^5 \quad (\text{Blasius}) \quad (6.22)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad \text{für } 10^5 \leq Re \leq 3 \cdot 10^6 \quad (\text{Prandtl}) \quad (6.23)$$

Moody-Diagramm

Das Moody-Diagramm stellt die Rohrreibungszahl λ in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re (laminare und turbulente Strömungen) und der äquivalenten Sandkornrauigkeit k_s für technisch raue Rohre dar.



Externe Strömungen

Grenzschicht an einer ebenen Platte

Grenzschichtdicke (laminar):

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}} \tag{6.24}$$

Reynoldszahl bezogen auf die Lauflänge:

$$Re_x = \frac{c_\infty x}{\nu} \tag{6.25}$$

mit c_∞ : Anströmgeschwindigkeit parallel zur Plattenoberfläche
 x : überströmte Länge, Beginn: Plattenvorderkante

Laminar-turbulenter Umschlag:

$$Re_{x_{krit}} = \frac{c_\infty x_{krit}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5 \tag{6.26}$$

Strömungswiderstand

Gesamtwiderstand

$$F_W = F_{w,\tau} + F_{w,p} = c_w \frac{\rho}{2} c_\infty^2 A \tag{6.27}$$

mit $F_{w,\tau}$: Widerstandskraft infolge der Reibung
 $F_{w,p}$: Widerstandskraft infolge der Druckdifferenz
 c_w : Widerstandskoeffizient
 A : angeströmte oder umströmte Fläche

Reibungswiderstand einer ebenen Platte:

$$c_{w,\tau} = \begin{cases} \frac{1,328}{\sqrt{Re_l}} & \text{lam. Grenzschicht} \\ \frac{0,074}{Re_l^{1/5}} & \text{turb. Grenzschicht} \end{cases} \quad (6.28)$$

mit $Re_l : \frac{c_\infty l}{\nu}$

Ausströmvorgänge

Ausströmgeschwindigkeit für ein *inkompressibles* Fluid ($c_{innen} = c_0 = 0$):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p_{aus}) + 2gh} \quad (6.29)$$

Ausströmgeschwindigkeit für ein *kompressibles* Fluid ($c_{in} = 0$):

$$c_{aus} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_0 \left(1 - \left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right)} \quad (6.30)$$

Massenstrom:

$$\dot{m} = A_{aus} c_{aus} \rho_{aus} = A_{aus} \sqrt{2p_0 \rho_0} \psi \quad (6.31)$$

mit Ausflußfunktion:

$$\psi = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right)} \quad (6.32)$$

Kritisches Druckverhältnis:

$$\left(\frac{p_{aus}}{p_0} \right)^* = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (6.33)$$

Gasdynamik

Thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad ; \quad \text{mit } R : \text{Gaskonstante, [J/(kg K)] und } T : \text{Temperatur, [K]} \quad (6.34)$$

Isentropenbeziehung:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \quad ; \quad \text{mit } \kappa = \frac{c_p}{c_v} : \text{Isentropenexponent} \quad (6.35)$$

$$R = c_p - c_v = \frac{\kappa-1}{\kappa} c_p \quad (6.36)$$

Spezifische Enthalpie:

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad \text{mit } u : \text{spez. innere Energie, [J/kg]} \quad (6.37)$$

Schallgeschwindigkeit:

$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad (6.38)$$

Mach-Zahl:

$$Ma = c/a \quad (6.39)$$

Zustandsänderung aus dem Ruhezustand (X_0) für ein ideales Gas bei isentroper, verlustfreier, stationärer Strömung:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \quad (6.40)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.41)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.42)$$

Zustandsänderung für den kritischen Zustand (X^*) eines idealen Gases in einer isentropen, verlustfreien, stationären Strömung:

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (6.43)$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.44)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.45)$$

Für die Strömungen zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 auf dem Stromfaden gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right) \quad (6.46)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (6.47)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\rho_1}{p_1} (c_2^2 - c_1^2)\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad (6.48)$$