Leibniz Universität Hannover
Institut für Turbomaschinen und Fluid-Dynamik

Herleitung des Zusammenhangs von polytropen und isentropen Wirkungsgrad

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen dem polytropen und isentropen Wirkungsgrad dargestellt. Die Erläuterungen folgen dem Lehrbuch "Fluid Dynamics and Thermodynamics of Turbomachinery" von Dixon und Hall, S. 20 ff.
Der isentrope Wirkungsgrad einer Turbinenstufe ist gemäß der Isentropen-Beziehung wie folgt definiert:

$$\eta_{is,T} = \frac{\Delta h}{\Delta h_{is}} = \frac{1-(\frac{T_2}{T_1})}{1-(\frac{p_2}{p_1})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}. \tag{1}$$

Analog die Formel des polytropen Wirkungsgrads:

$$\eta_{p,T} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{\ln(\frac{T_1}{T_2})}{\ln(\frac{p_1}{p_2})}. \tag{2}$$

Die beiden Gleichungen (1) und (2) werden nun nach dem Temperaturverhältnis $\frac{T_2}{T_1}$ aufgelöst (siehe (3) und (4)) und anschließend gleichgesetzt.

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta_{is,T}(1-(\frac{p_2}{p_1})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}) \tag{3}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{(\frac{1-\kappa}{\kappa}\cdot\eta_{p,T}\cdot\ln(\frac{p_1}{p_2}))} \tag{4}$$

Für die Wirkungsgrade $\eta_{is,T}$, bzw. $\eta_{p,T}$ ergeben sich somit:

$$\eta_{is,T} = \frac{1-e^{(\frac{1-\kappa}{\kappa}\cdot\eta_{p,T}\cdot\ln(\frac{p_1}{p_2}))}}{1-(\frac{p_2}{p_1})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \frac{1-e^{(\frac{1-\kappa}{\kappa}\cdot\eta_{p,T}\cdot\ln(\frac{1}{\pi}))}}{1-\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}, \tag{5}$$

bzw.

$$\eta_{p,T} = \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{\ln(\frac{1}{1-\eta_{is,T}(1-(\frac{p_2}{p_1})^{\frac{\kappa-1}{\kappa}})})}{\ln(\frac{p_1}{p_2})} = \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{\ln(\frac{1}{1-\eta_{is,T}(1-\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}})})}{\ln(\frac{1}{\pi})}. \tag{6}$$

Die Herleitung des Zusammenhangs der beiden Wirkungsgrade kann in gleicher Weise für den Verdichter vorgenommen werden. An dieser Stelle beschränkt sich die Angabe auf die Definition der mathematischen Zusammenhänge zwischen $\eta_{is,V}$ und $\eta_{p,V}$.

$$\eta_{is,V} = \frac{\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa\eta_{p,V}}} - 1} \tag{7}$$

$$\eta_{p,V} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\ln(\pi)}{\ln(\frac{\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}-1}{\eta_{p,V}} - 1)} \tag{8}$$