Herleitung

Im Folgenden wird die Definition des Geschwindigkeitsdreicks der Laufräder von Repetierstufen als Funktion der Umfangsgeschwindigkeit u, Reaktionsgrad r, Arbeitszahl ψ und Durchflusszahl ϕ hergeleitet. Die Herleitung erfolgt am Beispiel von Verdichtern, gilt aber auch für Turbinen. Grundlegende Annahmen:

- Axialmaschine, konstante Umfangsgeschwindigkeit im Mittenschnitt
- Repetierstufe: $c_2 = c_0$
- konstante Axialgeschwindigkeit: $c_{ax} = const.$
- keine Verluste

Definition des Reaktionsgrads:

$$r = \frac{statische\ Enthalpieänderung\ im\ Laufrad}{statische\ Enthalpieänderung\ in\ der\ Stufe} = \frac{h_{2,stat} - h_{1,stat}}{h_{2,stat} - h_{0,stat}} \tag{1}$$

Mit der Definition der Totalenthalpie $h_{tot} = h_{stat} + \frac{c^2}{2}$ ergibt sich aus Gl. (1):

$$r = \frac{\left(h_{2,tot} - \frac{c_2^2}{2}\right) - \left(h_{1,tot} - \frac{c_1^2}{2}\right)}{\left(h_{2,tot} - \frac{c_2^2}{2}\right) - \left(h_{0,tot} - \frac{c_0^2}{2}\right)} = \frac{\overbrace{h_{2,tot} - h_{1,tot}}^{keine\ Verluste\ im\ Leitrad} \quad -\frac{c_2^2}{2} + \frac{c_1^2}{2}}{h_{2,tot} - h_{0,tot} \quad \underbrace{-\frac{c_2^2}{2} + \frac{c_0^2}{2}}_{Repetierstufe:\ c_2 = c_0}} \tag{2}$$

Für eine Repetierstufe entspricht die Ab- der Anströmung: $c_2 = c_0$. Da Verluste im Leitrad vernachlässigt werden, findet die Totalenthalpieänderung in der Stufe nur im Laufrad statt. Also:

$$\Delta h_{tot,Stufe} = h_{2,tot} - h_{1,tot} = h_{2,tot} - h_{0,tot}$$

Mit diesen Annahmen vereinfacht sich Gl. (2) zu:

$$r = \frac{\Delta h_{tot,Stufe} - \frac{c_2^2}{2} + \frac{c_1^2}{2}}{\Delta h_{tot,Stufe}} = 1 + \frac{-\frac{c_2^2}{2} + \frac{c_1^2}{2}}{\Delta h_{tot,Stufe}} = 1 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2\Delta h_{tot,Stufe}} \tag{3}$$

Für weitere Umformungen wird die Definition der *Euler'schen TurbinenGl.* genutzt:

$$\Delta h_{tot,Stufe} = u(c_{2,u} - c_{1,u}) = u\Delta c_u$$

Ferner wird die Strömungsgeschwindigkeit c gemäß $c^2 = c_{ax}^2 + c_u^2$ in Axial- und Umfangskomponenten zerlegt.

$$r = 1 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2\Delta h_{tot,Stufe}} = 1 + \frac{(c_{1,u}^2 + c_{1,ax}^2) - (c_{2,u}^2 + c_{2,ax}^2)}{2u(c_{2,u} - c_{1,u})} \tag{4}$$

Wird Gl. (4) weiter vereinfacht ergibt sie sich zu:

$$r = 1 + \frac{c_{1,u}^2 - c_{2,u}^2 + \overbrace{c_{1,ax}^2 - c_{2,ax}^2}^{c_{ax}=const}}{2u(c_{2,u} - c_{1,u})} = 1 + \frac{c_{1,u}^2 - c_{2,u}^2}{2u(c_{2,u} - c_{1,u})} \tag{5}$$

Mit Hilfe der dritten Binomischen Formel:

$$c_{1,u}^2 - c_{2,u}^2 = (c_{1,u} + c_{2,u})(c_{1,u} - c_{2,u})$$

ergibt sich Gl. (5) zu:

$$\begin{aligned} r &= 1 + \frac{c_{1,u}^2 - c_{2,u}^2}{2u(c_{2,u} - c_{1,u})} = 1 + \frac{(c_{1,u} - c_{2,u})(c_{1,u} + c_{2,u})}{2u(c_{2,u} - c_{1,u})} = 1 - \frac{(c_{2,u} - c_{1,u})(c_{1,u} + c_{2,u})}{2u(c_{2,u} - c_{1,u})} \\ &= 1 - \frac{c_{1,u} + c_{2,u}}{2u} \end{aligned} \tag{6}$$

Umgeformt ergibt sich:

$$c_{2,u} + c_{1,u} = 2u(1 - r) \tag{7}$$

Die Arbeitszahl ist definiert als $\psi = -\frac{\Delta h_{tot,Stufe}}{u^2}$. Wird die *Euler'sche Turbinengleichung* berücksichtigt, ergibt sich $\psi = -\frac{\Delta c_u}{u}$. Gl. (7) kann umgeschrieben werden zur *dimensionslosen Wirbelgeschwindigkeit*:

$$\begin{aligned} c_{2,u} + c_{1,u} &= 2u(1 - r) \\ \Leftrightarrow c_{1,u} = 2u(1 - r) - c_{2,u} &= 2u(1 - r) - c_{2,u} + c_{1,u} - c_{1,u} \\ &= 2u(1 - r) - \Delta c_u - c_{1,u} \\ \Leftrightarrow 2c_{1,u} &= 2u(1 - r) - \Delta c_u \Leftrightarrow \frac{c_{1,u}}{u} = 1 - r + \frac{1}{2}\psi \end{aligned} \tag{8}$$

Analog ergibt sich:

$$\frac{c_{2,u}}{u} = 1 - r - \frac{1}{2}\psi \tag{9}$$

Betrachtet man das Geschwindigkeitsdreieck in Abb. 1 gilt die geometrische Beziehung:

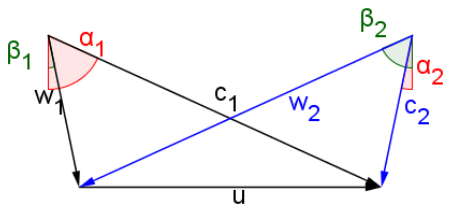

Abbildung 1: Geschwindigkeitsdreieck mit Darstellung der Umfangskomponenten

$w_{1,u} + u = c_{1,u}$. Umgeformt und auf die Umfangskomponente u bezogen, gelten:

$$\frac{w_{1,u}}{u} = \frac{c_{1,u}}{u} - 1$$

sowie

$$\frac{w_{2,u}}{u} = \frac{c_{2,u}}{u} - 1$$

Zusammen mit den Zusammenhängen aus Gleichungen (8) und (9) erhält man:

$$\frac{w_{1,u}}{u} = 1 - r + \frac{1}{2}\psi - 1 = \frac{1}{2}\psi - r \tag{10}$$

und

$$\frac{w_{2,u}}{u} = 1 - r - \frac{1}{2}\psi - 1 = -\frac{1}{2}\psi - r \tag{11}$$

Die verbliebenden Geschwindigkeitskomponenten w_1, w_2 und c_1, c_2 können über die Pythagoras-Beziehung

$$w = \sqrt{w_u^2 + \underbrace{w_{ax}^2}_{=c_{ax}}} = \sqrt{w_u^2 + c_{ax}^2}$$

sowie

$$c = \sqrt{c_u^2 + c_{ax}^2}$$

ebenfalls auf die Umfangsgeschwindigkeit normiert werden.

$$\frac{w_1}{u} = \sqrt{\underbrace{\frac{w_{1,u}^2}{u^2}}_{=Gl.(10)} + \underbrace{\frac{c_{1,ax}^2}{u^2}}_{=\Phi^2}} = \sqrt{(\frac{1}{2}\psi - r)^2 + \Phi^2} \tag{12}$$

$$\frac{w_2}{u} = \sqrt{\underbrace{\frac{w_{2,u}^2}{u^2}}_{=Gl.(11)} + \underbrace{\frac{c_{2,ax}^2}{u^2}}_{=\Phi^2}} = \sqrt{(-\frac{1}{2}\psi - r)^2 + \Phi^2} \tag{13}$$

$$\frac{c_1}{u} = \sqrt{\underbrace{\frac{c_{1,u}^2}{u^2}}_{=Gl.(8)} + \underbrace{\frac{c_{1,ax}^2}{u^2}}_{=\Phi^2}} = \sqrt{(1 - r + \frac{1}{2}\psi)^2 + \Phi^2} \tag{14}$$

$$\frac{c_2}{u} = \sqrt{\underbrace{\frac{c_{2,u}^2}{u^2}}_{=Gl.(9)} + \underbrace{\frac{c_{2,ax}^2}{u^2}}_{=\Phi^2}} = \sqrt{(1 - r - \frac{1}{2}\psi)^2 + \Phi^2} \tag{15}$$

Die Winkel der relativen und absoluten Strömungen β, bzw. α können über die Tangensfunktion berechnet werden (vgl. Abb. 1).

$$\tan\alpha_1 = \frac{c_{1,u}}{c_{1,ax}} = \frac{\overbrace{\frac{c_{1,u}}{u}}^{=Gl.(8)}}{\underbrace{\frac{c_{1,ax}}{u}}_{=\Phi}} = \frac{1 - r + \frac{1}{2}\psi}{\Phi} \Leftrightarrow \alpha_1 = \arctan\frac{1 - r + \frac{1}{2}\psi}{\Phi} \tag{16}$$

$$\tan\beta_1 = \frac{w_{1,u}}{c_{1,ax}} = \frac{\overbrace{\frac{w_{1,u}}{u}}^{=Gl.(10)}}{\underbrace{\frac{c_{1,ax}}{u}}_{=\Phi}} = \frac{\frac{1}{2}\psi - r}{\Phi} \Leftrightarrow \beta_1 = \arctan\frac{\frac{1}{2}\psi - r}{\Phi} \tag{17}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{c_{2,u}}{c_{2,ax}} = \frac{\overbrace{\frac{c_{2,u}}{u}}^{=Gl.(9)}}{\underbrace{\frac{c_{2,ax}}{u}}_{=\Phi}} = \frac{1 - r - \frac{1}{2}\psi}{\Phi} \Leftrightarrow \alpha_2 = \arctan\frac{1 - r - \frac{1}{2}\psi}{\Phi} \tag{18}$$

$$\tan\beta_2 = \frac{w_{2,u}}{c_{2,ax}} = \frac{\overbrace{\frac{w_{2,u}}{u}}^{=Gl.(11)}}{\underbrace{\frac{c_{2,ax}}{u}}_{=\Phi}} = \frac{-\frac{1}{2}\psi - r}{\Phi} \Leftrightarrow \beta_2 = \arctan\frac{-\frac{1}{2}\psi - r}{\Phi} \tag{19}$$

Symbolverzeichnis

c	Strömungsgeschwindigkeit im Absolutsystem
u	Umfangsgeschwindigkeit
w	Strömungsgeschwindigkeit im Relativsystem
$h_{0,stat}$	statische Enthalpie am Eintritt des Leitrades
$h_{1,stat}$	statische Enthalpie am Eintritt des Laufrades
$h_{2,stat}$	statische Enthalpie am Austritt des Laufrades
$h_{0,tot}$	Totalenthalpie am Eintritt des Leitrades
$h_{1,tot}$	Totalenthalpie am Eintritt des Laufrades
$h_{2,tot}$	Totalenthalpie am Austritt des Laufrades
$\Delta h_{tot,Stufe}$	Totalenthalpieumsatz in der gesamten Stufe
ψ	Arbeitszahl
Φ	Durchflusszahl
r	Reaktionsgrad
α_1	Anströmwinkel des Laufrades im Absolutsystem
α_2	Abströmwinkel des Laufrades im Absolutsystem
β_1	Anströmwinkel des Laufrades im Relativsystem
β_2	Abströmwinkel des Laufrades im Relativsystem